UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01218156 6

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Augustins, 55.

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME PREMIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

(Tous droits réservés.)

QA
303
H68
t.1

240 35
4/8/92

PRÉFACE.

Ce Traité est en grande partie la reproduction de mes Leçons autographiées, qui ont été publiées en 1871 et 1872, et tirées à un petit nombre d'exemplaires. Ce tirage, ayant été promptement épuisé, j'ai pensé qu'une édition plus complète, mise au courant des nouveaux programmes de l'Enseignement supérieur, pourrait rendre quelques services aux aspirants à la licence ès Sciences mathématiques, et j'ai profité du bienveillant concours que M. Gauthier-Villars s'est empressé de m'accorder pour cette publication.

L'Ouvrage est divisé en six Livres, précédés d'une Introduction, dans laquelle j'expose diverses notions préliminaires, utiles ou même nécessaires pour la lecture de ce qui suit.

Le premier des trois Chapitres qui composent cette Introduction contient les principes généraux du Calcul des opérations considérées au point de vue le plus abstrait, indépendamment de leur nature intrinsèque et de celle des quantités qui leur sont soumises, et en ayant égard uniquement à leurs propriétés *combinatoires*. Ces notions, que l'on peut d'ailleurs laisser de côté dans une première lecture de l'Ouvrage, m'ont paru indispensables pour le lecteur qui veut se familiariser avec les considérations, d'un degré d'abstraction de plus en plus élevé, qu'exigent les progrès de l'Analyse, à mesure que l'objet de ses recherches devient de plus en plus compliqué.

La méthode que j'ai adoptée est celle qu'a suivie Hankel dans ses *Vorlesungen über complexe Zahlen*. J'ai seulement remplacé

les notations de cet auteur par celles dont Grassmann a fait usage dans ses ouvrages, et qui ont l'avantage de se prêter facilement à la généralisation, parce qu'elles ne rappellent par leur forme aucune des notations usuelles, tout en permettant de conserver aux calculs la disposition à laquelle on est habitué.

Ces notions sont éclaircies par l'application que j'en fais, dans le Chapitre suivant, à la généralisation de l'idée de quantité, conduisant successivement des quantités *arithmétiques* aux quantités *négatives* et aux quantités *imaginaires* ou *complexes*. On est amené à la considération de ces quantités par la résolution des équations du premier et du second degré, lorsqu'on veut étendre à tous les cas les propriétés reconnues dans les cas où ces équations sont arithmétiquement résolubles; on reconnaît ensuite que les mêmes symboles suffisent pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés. Les opérations auxquelles ces symboles doivent être soumis ne diffèrent en rien par leurs propriétés (¹) des opérations analogues relatives aux quantités arithmétiques, et l'admission de ces symboles ne pouvant amener à aucune conséquence contradictoire, le calcul de ces quantités, considérées au point de vue purement abstrait, est assis dès lors sur des bases certaines, et ne peut conduire qu'à des résultats absolument vrais.

Mais, si les exigences de la Science pure se trouvent ainsi complétement satisfaites, il en est tout autrement des besoins de l'enseignement. Pour se classer dans l'esprit des commençants, les idées abstraites ne peuvent guère se passer d'une représentation par des images physiques, sans laquelle il serait bien difficile d'en comprendre la signification et l'utilité. Jusqu'à ce que Descartes eût représenté géométriquement les racines négatives des équations, on les appela *racines fausses*. Jusqu'au jour où les travaux d'Argand et de Gauss ont découvert la traduction géométrique des quantités complexes, elles n'ont cessé d'être regardées comme des symboles *imaginaires*.

L'objet du Chapitre II est d'établir la possibilité de cette représentation. Après avoir rappelé la théorie connue des quantités négatives, je démontre que les opérations sur le signe représentatif

---

(¹) Sauf en ce qui concerne l'*uniformité* des opérations inverses de l'élévation aux puissances.

d'un point du plan ont des propriétés identiques à celles qu'il faut attribuer, en Algèbre, aux opérations portant sur le symbole $a + b\sqrt{-1}$. Il en résulte que ce symbole peut être pris comme représentation d'un point du plan, et ainsi les calculs sur les imaginaires trouvent maintenant leur réalisation géométrique. Cette interprétation a pour effet de guider et de rassurer l'esprit peu familier encore avec le monde de l'abstraction, et qui n'accepterait pas sans défiance l'usage que l'on ferait de symboles mystérieux et d'apparence contradictoire, pour servir de lien entre des notions réelles et palpables.

Le Chapitre III de l'Introduction avait été rédigé à une époque où la théorie des déterminants n'avait pas encore acquis droit de bourgeoisie dans notre enseignement élémentaire. J'ai cru devoir le conserver ici, pensant qu'il serait commode pour le lecteur d'avoir sous la main un résumé succinct de toutes les propositions de cette théorie qui seront invoquées dans la suite de ce Traité.

Le premier Livre traite des principes du Calcul infinitésimal. Comme l'indique le titre même de l'Ouvrage, j'ai renoncé, suivant l'exemple déjà donné dans d'excellents Traités, à la division de l'Analyse supérieure en *Calcul différentiel* et *Calcul intégral*; cette division ne m'a pas paru fondée sur le degré de difficulté de l'étude de ces deux branches, dont le point de départ est le même, et elle présente l'inconvénient de priver du secours mutuel que se prêtent dès le début les deux opérations, inverses l'une de l'autre, de la différentiation et de l'intégration. Enfin l'étude simultanée des premiers éléments des deux calculs permet à l'étudiant d'arriver plus vite à s'exercer sur les applications les plus variées du calcul à la Géométrie ou à la Mécanique.

En ce qui touche la méthode d'exposition des principes du Calcul infinitésimal, il n'y avait pas, en réalité, de choix à faire : il n'existe qu'une seule méthode rigoureuse, de quelque forme qu'on la revête et quelque nom qu'on lui donne, qu'on l'appelle *méthode des infiniment petits* ou *méthode des limites* : c'est la méthode de Cauchy et de Duhamel, que l'on peut exposer de bien des manières différentes, en mettant plus ou moins en relief le principe sur lequel on s'appuie, en déguisant plus ou moins le rôle que l'on fait jouer aux infiniment petits, en confondant même

quelquefois la timidité du langage avec la rigueur du raisonnement [1].

On doit à Duhamel d'avoir, le premier, formulé nettement le principe qui identifie ces méthodes, si diverses qu'elles soient en apparence. Le but du Calcul infinitésimal est généralement la détermination des limites de rapports ou de sommes de certaines variables auxiliaires, appelées *quantités infiniment petites*, et le plus souvent ce but ne peut être atteint qu'en remplaçant ces variables par d'autres quantités susceptibles d'une expression plus simple, et conduisant au même résultat final. Le principe de Duhamel, que l'on peut nommer le *principe de substitution des infiniment petits*, consiste en ce que, dans les deux cas cités, on peut remplacer un infiniment petit par un autre infiniment petit dont le rapport au premier ait pour limite l'unité. En ne perdant jamais de vue ce principe, on pourra se servir en toute sécurité du langage et de la notation des infiniment petits, qui a sur celui de la méthode dite *des limites* l'immense avantage de la concision et de la simplicité, et qui seul permet au géomètre de se laisser guider, comme moyen d'intuition, par le sentiment de l'évidence tiré de la considération des grandeurs finies.

Mais, pour pouvoir appliquer ce principe, il faut être en mesure de reconnaître l'ordre de grandeur relative de deux infiniment petits, et de décider dans quels cas l'un d'eux peut être négligé, comme étant une fraction infiniment petite de l'autre. Cette question de limite de rapport se ramène à la recherche des dérivées, par l'étude desquelles il est nécessaire de commencer l'exposition de l'Analyse des infiniment petits. Je me suis efforcé d'introduire dans cette étude toute la rigueur que l'on rencontre dans les récents travaux sur ce sujet, et en particulier dans le Traité de M. J.-A. Serret. Je suis hautement redevable, pour cette partie, aux précieux conseils de MM. Darboux et H.-A. Schwarz.

Les bases de l'Analyse infinitésimale étant ainsi posées, on peut alors introduire dans le calcul les accroissements infiniment petits eux-mêmes ou les *différentielles*, sans passer par la considération étrangère des accroissements finis, et sans être obligé de sub-

---

[1] Dans un des Traités de *Calcul différentiel* le plus justement estimés, la *différentielle* d'une fonction n'est définie qu'au dernier Chapitre.

stituer à la notion si simple de l'accroissement infinitésimal des conceptions artificielles, ayant pour seul but de donner aux équations entre quantités infiniment petites (ou infiniment grandes) une exactitude absolue, qu'il n'est pas dans leur nature de présenter, et qui n'aurait aucune influence sur le résultat final. Ces artifices, qui pouvaient avoir leur raison d'être à une époque où l'on mettait encore en doute la légitimité de la méthode infinitésimale, sont aujourd'hui devenus superflus. Ils ont même l'inconvénient de ne pas concorder en apparence avec le langage des infiniment petits, employé de tout temps dans les applications pratiques, et qui présente alors, aux yeux des commençants, l'aspect d'un simple procédé d'approximation.

Ces considérations m'ont fait revenir à la notation adoptée par Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse*. La différentielle d'une fonction $y = f(x)$ est définie comme l'accroissement infiniment petit de cette fonction, correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable indépendante. Mais, si cet accroissement doit figurer dans la recherche d'une limite de rapport ou de somme, on peut, sans changer le résultat cherché, altérer la quantité dy d'une fraction d'elle-même infiniment petite, et considérer en général les différentielles comme représentant, soit les accroissements eux-mêmes des variables, soit des quantités quelconques différant de ces accroissements respectifs de fractions d'elles-mêmes infiniment petites. Il m'a donc semblé superflu de désigner ces quantités tour à tour par deux caractéristiques différentes Δ et d, cette double notation ne pouvant avoir pour effet que d'obscurcir dans l'esprit des commençants la vraie notion de l'infiniment petit.

Dans l'exposition des principes, j'ai fait un continuel usage de la représentation géométrique, qui donne aux raisonnements abstraits une forme intuitive plus facile à suivre. Mais il faudrait bien se garder de confondre cet usage des *notations* géométriques avec une méthode de démonstration qui serait fondée sur les principes propres à la Géométrie pure. Dans nos raisonnements analytiques, la courbe qui représente une fonction n'existe qu'en vertu des propriétés de la relation analytique abstraite qui définit cette fonction, et c'est comme conséquence de ces propriétés que l'on peut concevoir une suite de points aussi rapprochés que l'on vou-

dra, et tels que la droite qui joint un de ces points à un point voisin tende vers une direction déterminée. Les principes de la Géométrie pure nous fournissent seulement des constructions qui, jouissant des mêmes propriétés que les opérations abstraites, peuvent servir à les représenter, et à remplacer ainsi l'emploi des formules.

Après avoir défini les différentielles dans les cas d'une ou de plusieurs variables indépendantes, j'établis la notion des intégrales tant définies qu'indéfinies. J'expose ensuite les méthodes les plus simples de différentiation et d'intégration, et j'en fais l'application aux diverses fonctions élémentaires.

Je développe avec quelque étendue l'importante question du calcul direct des dérivées d'ordre quelconque; puis je passe à la représentation de ces dérivées au moyen des différentielles des ordres correspondants. Je traite ensuite du changement de variables dans les expressions différentielles, des propriétés les plus simples des déterminants fonctionnels, et du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Le Livre Ier, comme tous les suivants, est terminé par un recueil d'exercices faciles sur les divers sujets qui y ont été exposés.

Les longs détails dans lesquels je viens d'entrer sur le plan du commencement de ce Traité suffisent déjà pour renseigner le lecteur sur la marche adoptée dans les Livres suivants, dont je me contenterai d'indiquer sommairement le contenu.

Le Livre II est consacré aux applications analytiques du Calcul infinitésimal.

Le premier Chapitre traite du développement des fonctions en séries, et se termine par un complément aux éléments de la théorie des quantités complexes, où sont définies les fonctions exponentielles et circulaires de ces quantités.

Le Chapitre II a pour objet les applications analytiques de la différentiation : détermination des vraies valeurs; maxima et minima; décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Le Chapitre III contient le développement et l'application des méthodes d'intégration indiquées dans le Livre Ier; l'étude des cas singuliers des intégrales indéfinies; la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$, avec l'emploi de ces opérations dans le

calcul des intégrales définies spéciales; le changement de variables dans les intégrales multiples; les propriétés les plus simples des intégrales eulériennes, et la formule de Maclaurin pour le calcul approché des intégrales définies.

Le Livre III traite de l'application de l'Analyse infinitésimale à la Géométrie.

Le Chapitre Ier, consacré à l'étude des courbes planes, est terminé par un exposé succinct de la méthode d'Analyse géométrique proposée par M. Bellavitis sous le nom de *Méthode des équipollences,* et qui, par une heureuse application de l'algorithme des quantités complexes, donne la solution la plus simple et la plus élégante de certaines classes de problèmes de Géométrie plane.

Dans le Chapitre II, après avoir traité les questions de tangence et de courbure des lignes dans l'espace et des surfaces, je donne quelques notions sur la mesure de la courbure des surfaces, d'après Gauss, avec quelques exemples de l'emploi des coordonnées curvilignes dans l'étude des surfaces.

Le Chapitre III renferme les applications de l'intégration aux questions de quadrature et de cubature des lignes et des surfaces, ainsi qu'aux questions analogues, relatives à la détermination des centres de gravité, des moments d'inertie, etc.

La théorie des équations différentielles fait le sujet des deux Livres suivants, dont l'un traite des équations et des systèmes d'équations à une seule variable indépendante, l'autre des équations à plusieurs variables indépendantes. Dans chacun de ces Livres, je commence par montrer comment on peut former des équations différentielles par l'élimination de constantes arbitraires ou de fonctions arbitraires, la considération de ces exemples de formation directe pouvant éclairer sur les moyens de procéder à l'opération inverse, savoir, à l'intégration d'une équation différentielle donnée, et faire mieux saisir la dépendance qui existe entre cette équation et ses diverses espèces de solutions.

A la suite de ces préliminaires, dans le premier Chapitre du Livre IV, je donne, avec quelques modifications, la démonstration de Cauchy de ce théorème fondamental, qu'une équation différentielle d'ordre quelconque, remplissant certaines conditions, détermine une fonction implicite y de la variable indépendante x, qui jouit de la propriété d'être uniforme et continue, si la valeur de y'

tirée de l'équation est uniforme et continue, et de pouvoir prendre une valeur arbitraire pour une valeur de x donnée à volonté. La détermination effective de cette fonction peut se faire avec une approximation indéfinie, par la construction d'un polygone infinitésimal.

J'expose ensuite les cas les plus simples de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, en profitant des nombreux exemples que contient le *Treatise on Differential Equations* de Boole.

Pour la recherche du caractère distinctif des solutions singulières et des intégrales particulières des équations du premier ordre, j'expose une méthode inédite, due à P.-H. Blanchet, et qui m'avait été communiquée par l'auteur en 1846. Cette méthode conduit à une suite indéfinie de critériums, dont chacun correspond au cas où le précédent est en défaut, comme cela a lieu dans la question analogue des critériums successifs de convergence des séries infinies.

Après avoir indiqué les cas les plus simples d'intégration ou d'abaissement des équations différentielles d'ordres supérieurs, je traite avec plus de détails la théorie des équations différentielles linéaires. Sans vouloir donner à l'emploi du calcul des symboles d'opérations toute l'étendue que ce calcul a reçue dans les travaux de Cauchy et des géomètres anglais, j'ai cru néanmoins qu'il y a grand avantage à introduire dans l'enseignement l'usage des symboles les plus simples, qui ne sont que des abréviations d'écriture, et dont la traduction se présente d'elle-même à chaque phase du calcul. L'usage de ces symboles s'étend facilement au cas où les puissances de la caractéristique D_x sont remplacées par des factorielles.

J'ai traité de la même manière, autant que le permettait la plus grande complexité du sujet, l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires simultanées.

Le dernier Chapitre du Livre IV renferme les principes élémentaires du calcul des variations des intégrales simples.

Dans le Livre V, je m'occupe des équations différentielles à plusieurs variables indépendantes, en commençant par les équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré entre trois variables.

Après avoir montré sur divers exemples géométriques la signification des équations aux dérivées partielles, j'établis, par la méthode de Jacobi, l'identité entre les problèmes de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, et de l'intégration d'un certain système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires. Je donne ensuite le moyen d'intégrer une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de deux variables indépendantes, et je termine ce Livre par un aperçu des méthodes employées pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque, dans les problèmes de Physique mathématique.

Le Livre VI comprend l'étude des fonctions d'une variable complexe, et son application à la théorie des fonctions elliptiques.

Pour la théorie des fonctions uniformes, j'ai reproduit en partie le travail publié en 1868 dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. VI, où je me suis surtout inspiré du Livre de C. Neumann ([1]). Cette théorie est suivie d'applications au développement des fonctions en séries, à la décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples, à la théorie des équations algébriques, et au calcul des intégrales définies spéciales.

L'expression des coefficients du développement d'une fonction synectique en une suite périodique étant de forme identique à celle des coefficients de la série de Fourier pour le développement d'une fonction arbitraire, continue ou discontinue, j'ai pris cette occasion pour exposer, d'après Lejeune-Dirichlet, la démonstration de cette dernière formule, et celle de l'intégrale de Fourier, qui s'en déduit immédiatement, et dont j'ai montré l'application au calcul des intégrales définies.

Je passe ensuite à l'étude des fonctions multiformes, particulièrement de celles qui proviennent de l'intégration des fonctions algébriques.

J'étudie ensuite, sur quelques exemples simples, les fonctions synectiques qui naissent de l'inversion des intégrales précédentes.

Ces notions établies, j'aborde la théorie des fonctions elliptiques, en commençant par la réduction des intégrales elliptiques aux trois

---

([1]) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*. Leipzig, 1865.

formes canoniques de Legendre, d'après une méthode indiquée par Weierstrass, et je démontre leurs principales propriétés. Je développe les conséquences du théorème d'addition, et j'expose les cas les plus simples des formules de transformation des intégrales de première espèce, avec leur application au calcul numérique de ces intégrales.

Considérant maintenant la variable comme une quantité complexe, j'établis, d'après la marche indiquée par Ed. Weyr [1], la synecticité de la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce; je définis les *fonctions elliptiques* proprement dites, et j'étudie leur double périodicité.

Je passe de là à l'expression des fonctions elliptiques au moyen des doubles produits d'Abel, puis au moyen des produits simples d'Abel et de Jacobi, qui se transforment dans les fonctions ϑ.

J'indique les moyens d'exprimer, à l'aide de ces dernières fonctions, les intégrales de troisième espèce, en renvoyant, pour plus de détails, au *Recueil de formules et de Tables numériques*, que j'ai publié en 1866.

En parcourant les indications que je viens de donner sur le contenu de cet Ouvrage, on reconnaîtra sans peine que les matières traitées ne dépassent pas les limites tracées par le nouveau programme de la licence ès sciences mathématiques, et que je n'ai fait qu'y ajouter des commentaires indispensables pour leur complète intelligence, ou des exercices comme en doit contenir tout livre d'enseignement. Il m'a semblé que, sans ces compléments, l'étude des parties difficiles, ajoutées aux matières de l'ancien programme, ne pourrait produire aucun des fruits qu'en attendent les auteurs de ces additions.

Du reste, le choix des articles que l'on pourra passer sans inconvénient dans une première lecture ne peut causer aucun embarras aux personnes travaillant sous la direction d'un professeur ou à portée de ses conseils. Quant aux lecteurs livrés entièrement à leurs propres forces, ils n'auront qu'à aborder directement les paragraphes correspondants aux divers articles du programme, sauf à remonter aux explications nécessaires, dont ils trouveront la place

---

(1) *Sitzungsberichte der k. b. Gesellschaft der Wiss. zu Prag*, juin 1876. — *Archiv mathematiky a fysiky*, t. II, p. 26.

indiquée par les nombreux renvois que j'ai eu soin de faire dans tout le cours de l'Ouvrage.

Je ne saurais terminer cette Préface sans exprimer ma reconnaissance pour les savants collègues qui ont bien voulu me guider de leurs précieux conseils, et parmi lesquels je dois citer M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université de Helsingfors. Je dois surtout les plus vifs remercîments à mon ami M. Laisant, qui m'a secondé avec un dévouement constant dans l'ingrate tâche de la révision des calculs et de la correction des épreuves.

Si cet Ouvrage obtient quelques succès, une bonne part en sera due aux soins que M. Gauthier-Villars a pris pour en faire un chef-d'œuvre typographique.

Bordeaux, octobre 1878.

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES. — NOTIONS SUR LE CALCUL DES OPÉRATIONS.

§ I.

OBJET DES MATHÉMATIQUES.

1. La plupart des phénomènes qui se passent sous nos yeux ne sont pas susceptibles d'une détermination *exacte*, et, lorsqu'ils se reproduisent, nous n'avons aucun moyen de nous assurer de leur parfaite identité. Toutefois il en est pour lesquels la détermination est possible avec une approximation et une sûreté assez grandes pour que l'incertitude qui subsiste ne puisse avoir d'inconvénient dans la pratique.

Quand la détermination exacte est possible, on peut procéder avec certitude à l'étude des lois de la transformation d'un phénomène dans un autre, et, si ces lois sont assez simples pour que nous parvenions à les saisir, leur ensemble constituera l'objet d'une *Science exacte*.

Dans le cas contraire, où l'on est forcé de se contenter d'une

détermination approximative, on modifie les résultats observés, de manière à pouvoir les assujettir à des lois simples, et l'on essaye de construire ainsi une Science exacte, qui n'a plus pour objet des êtres et des phénomènes réels, mais seulement des êtres et des phénomènes idéaux, définis uniquement par les propriétés que nous leur attribuons. Si ces propriétés ont été choisies en sorte que les phénomènes idéaux suivent des lois assez rapprochées de celles des phénomènes réels, la Science idéale, développée à l'aide de la Logique, tiendra lieu, jusqu'à un certain point, de la Science réelle; elle fournira des résultats plus ou moins conformes à l'observation; elle donnera d'utiles indications sur la manière de coordonner les recherches et de classer les phénomènes dans l'étude de la réalité, jusqu'au jour où, l'écart de l'idéal et du réel devenant trop grand, on se trouvera forcé de recommencer sur d'autres bases la construction d'une nouvelle Science idéale.

2. La construction d'une telle Science se compose essentiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée sur l'observation et l'expérience, consiste à rassembler des faits, et à en conclure par induction les lois et les principes qui serviront de fondements à la Science; l'autre, qui n'est qu'une branche de la Logique générale, s'occupe de combiner ces principes fondamentaux de manière à en déduire la représentation, au moins approximative, des faits observés, et à prédire en outre des faits nouveaux.

Ces lois et ces principes, suggérés par l'expérience et énoncés sous forme rigoureuse, comme devant régir les phénomènes idéaux dont s'occupe la Science exacte, s'appellent les *hypothèses* fondamentales de cette Science [1].

3. L'observation des faits ne peut, en général, avoir lieu avec une rigoureuse exactitude, et n'est jamais complète. Rien ne peut

[1] Il faut bien se garder d'attribuer aux hypothèses un rôle qui ne leur appartient pas relativement aux Sciences exactes. Les hypothèses de la Science idéale sont choisies en dehors de toute affirmation sur la réalisation physique des conditions qu'elles expriment. Elles signifient seulement que les choses se passent sensiblement *comme si ces conditions avaient réellement lieu.* La Science idéale les accepte comme si elles étaient absolument vraies, et s'occupe uniquement de développer leurs conséquences. C'est surtout par la considération de ces dernières que l'on peut apprécier, au point de vue réel, la probabilité plus ou moins grande des hypothèses.

donc nous garantir *a priori* que les hypothèses fournies par l'induction seront toutes vraies, ni qu'elles seront suffisantes.

On reconnaîtra leur fausseté lorsque, combinées suivant les règles de la Logique, elles aboutiront à des conséquences contradictoires, ou lorsque les faits nouveaux qu'elles conduiraient à prévoir seront en désaccord avec la réalité objective.

Il peut se faire, d'autre part, que les hypothèses admises ne soient pas toutes distinctes et indépendantes entre elles, et que quelques-unes fassent partie des conséquences que l'on peut tirer de la combinaison des autres.

L'examen de ces questions dépend de la partie abstraite de la Science, qui s'occupe de la combinaison des principes, sans avoir égard à leur origine expérimentale ni aux rapports de leurs conséquences avec les faits réels. C'est cette Science abstraite qui doit constater d'abord si les hypothèses sont compatibles entre elles, et ensuite si elles ne sont pas réductibles à un moindre nombre. Une Science fondée sur des hypothèses satisfaisant à ces conditions est absolument vraie au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter. Dans ce cas, c'est à la partie expérimentale et inductive qu'il faudrait s'en prendre; ce sont les hypothèses fondamentales qu'il faudrait changer. La partie purement logique, quoique devenue inutile pour l'explication des phénomènes réels, n'en serait pas moins irréprochable en elle-même.

Cette partie logique des Sciences exactes constitue ce qu'on appelle les *Mathématiques* proprement dites. Celles-ci se divisent à leur tour en *Mathématiques pures,* contenant les théories abstraites applicables à toutes les classes de faits indistinctement, et en *Mathématiques appliquées,* traitant de l'application de ces théories générales à des classes particulières de faits, et des procédés spéciaux qui s'adaptent le mieux à chacune de ces classes.

4. Les Mathématiques ne se bornent pas à la combinaison des lois fournies par l'observation du monde réel; elles devancent souvent l'observation, et, entraînées par l'analogie et par le besoin de généraliser, elles prennent pour objet d'étude des hypothèses dont la réalité n'a pas encore offert d'application. C'est ainsi qu'on s'est occupé des racines négatives ou imaginaires des équations long-

temps avant d'avoir reconnu la vraie nature de ces quantités; c'est ainsi que la Géométrie non euclidienne est devenue un fécond sujet de recherches, et que Laplace a cru devoir consacrer un Chapitre de la *Mécanique céleste* à l'étude des lois du mouvement d'un système de corps dans toutes les relations mathématiquement possibles entre la force et la vitesse. De telles généralisations ont non-seulement pour résultat de compléter et d'éclairer les théories des Mathématiques *usuelles*, mais encore elles préparent souvent des théories toutes faites pour de nouveaux ordres de faits que l'on viendra plus tard à découvrir, de même que la théorie des sections coniques était prête deux mille ans avant de trouver son application à l'étude des phénomènes naturels.

§ II.

DES OPÉRATIONS EN GÉNÉRAL.

5. On donne le nom d'*opération* à l'acte qui transforme un phénomène dans un autre, de sorte qu'à une succession de phénomènes correspond une combinaison d'opérations.

Pour appliquer la Logique à la combinaison des opérations, il n'est nullement nécessaire de connaître leurs effets réels et la manière dont elles s'exécutent. Il suffit d'avoir constaté certaines propriétés abstraites de ces opérations, auxquelles nous donnerons le nom de *propriétés combinatoires*. On peut construire une théorie abstraite et générale des opérations, fondée uniquement sur la considération de ces propriétés, et comprenant ainsi, comme cas particulier, l'Algèbre ordinaire.

6. Les opérations peuvent être simples, comme le sont les opérations fondamentales de l'Algèbre; elles jouissent alors de propriétés simples, et la théorie de leur combinaison peut recevoir un grand développement. D'autres fois, elles sont de nature plus complexe : telles sont les constructions géométriques, dont la combinaison se fait le plus souvent d'après des lois spéciales pour chaque cas particulier, sans qu'on puisse la soumettre à des procédés généraux.

Les opérations complexes peuvent généralement se ramener aux opérations simples. C'est cette décomposition d'opérations dans

leurs éléments qui caractérise les théories dites *analytiques* (Géométrie analytique, Mécanique analytique, etc.). On donne, par opposition, le nom de *synthétiques* aux théories fondées sur l'emploi direct des opérations complexes.

7. L'étude des premiers éléments de l'Arithmétique et de l'Algèbre fait déjà voir comment le besoin d'éviter l'accroissement indéfini du nombre des cas particuliers et de comprendre tous ces cas dans un énoncé unique conduit nécessairement à étendre les définitions primitives des opérations de l'Arithmétique. Ainsi la définition de la multiplication reçoit des extensions successives lorsqu'on suppose le multiplicateur fractionnaire, puis incommensurable, puis négatif, puis complexe, et il en est de même pour les autres opérations.

Dans ces généralisations graduelles, on peut être amené à faire perdre aux opérations quelques-unes de leurs propriétés. Par exemple, l'extraction des racines, qui en Arithmétique ne donne qu'un résultat unique, peut conduire à plusieurs résultats distincts lorsqu'on la considère au point de vue des quantités négatives et des quantités complexes. Le produit d'une multiplication cesse d'être indépendant de l'ordre des facteurs dans la théorie des quantités complexes, appelées *quaternions*, qui servent à la représentation des points de l'espace à trois dimensions.

8. Mais, si l'on peut, pour les besoins de la généralisation, abandonner telle ou telle propriété d'une opération, on doit, par contre, s'interdire d'ajouter aucune propriété nouvelle à celles qui avaient déjà lieu pour l'opération restreinte, et cela, afin que toute règle établie pour l'opération généralisée soit applicable aussi à l'opération restreinte, et contienne, comme cas particulier, la règle spéciale primitivement établie pour cette opération restreinte, de même que les quantités généralisées contiennent, comme cas particulier, les quantités restreintes.

Cette prescription, que l'on a soin d'observer dans la généralisation des définitions des quantités et des opérations correspondantes, constitue ce que Hankel a nommé le *principe de permanence des règles de calcul.*

En vertu de ce principe, tout calcul fait pour les quantités généralisées doit s'appliquer aux quantités d'ordre inférieur, la généra-

lisation ne pouvant introduire de nouvelles propriétés, ni donner lieu, par conséquent, à des règles qui ne résulteraient pas déjà des propriétés antérieurement admises.

9. L'établissement des règles du calcul dépend uniquement, comme nous l'avons fait observer [5], des propriétés des opérations. C'est aussi la considération de ces propriétés qui doit servir de guide dans le choix des moyens de généralisation, surtout lorsqu'on est forcé d'abandonner quelques-unes des propriétés de l'opération restreinte, devenues contradictoires. On devra alors conserver celles qui sont les plus importantes, et qui se prêtent le mieux à l'établissement de règles de calcul simples et générales. De là l'utilité d'une étude abstraite et générale des propriétés combinatoires des opérations.

10. Les considérations que nous allons exposer ne s'appliquent pas seulement aux combinaisons immédiates des quantités simples ou complexes; elles s'étendent aussi aux combinaisons des signes d'opération. Aussi éviterons-nous d'employer le mot de *quantités* en parlant des êtres soumis à ces opérations; nous les désignerons par le terme plus vague et plus compréhensif d'*objets*, également applicable au concret et à l'abstrait.

§ III.

DES PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES OPÉRATIONS.

11. Deux objets sont dits *égaux* quand ils peuvent se remplacer mutuellement dans une combinaison donnée, sans que le résultat soit altéré.

Cette définition s'applique non-seulement aux quantités proprement dites, mais encore aux symboles d'opérations, qui peuvent être traités comme des quantités, et soumis eux-mêmes à d'autres opérations.

12. Pour exprimer ces résultats sous une forme susceptible de généralisation, employons, à l'exemple de Grassmann, des signes autres que les signes ordinaires de l'Arithmétique, pour désigner une opération quelconque de nature indéterminée. Représentons,

par exemple, au moyen du symbole

$$a \sim b$$

(que nous énoncerons : a COMBINÉ AVEC b), le résultat d'une opération quelconque, par laquelle on a formé avec les objets a et b un troisième objet.

13. L'opération sera *uniforme* si, pour $a = a'$ et $b = b'$, on a

$$a \sim b = a' \sim b'.$$

Elle sera *commutative* si $a \sim b = b \sim a$.

Elle sera *associative* si $(a \sim b) \sim c = a \sim (b \sim c)$.

Dans ce cas, le résultat commun de ces deux séries différentes d'opérations pourra se représenter, en supprimant les parenthèses, par

$$a \sim b \sim c.$$

Elle sera *distributive relativement à une autre opération* représentée par le symbole $\uparrow$, si l'on a

$$(a \uparrow b) \sim c = (a \sim c) \uparrow (b \sim c)$$

ou bien

$$a \sim (b \uparrow c) = (a \sim b) \uparrow (a \sim c).$$

Ces deux définitions se confondent évidemment toutes les fois que l'opération $\sim$ est commutative; on a, en effet, dans ce cas,

$$(a \uparrow b) \sim c = (a \sim c) \uparrow (b \sim c) = (c \sim a) \uparrow (c \sim b) = c \sim (a \uparrow b),$$

et ces égalités expriment que la distributivité a lieu tant *par rapport au second terme* que *par rapport au premier*. On dit alors que l'opération $\sim$ est *complétement distributive*, relativement à l'opération $\uparrow$.

14. Par exemple, les opérations de l'Arithmétique sont toutes uniformes.

L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives.

L'élévation aux puissances a^b n'est ni commutative, ni associatives, a^b étant différent de b^a, et $(a^b)^c$ de $a^{(b^c)}$.

L'opération $a \frown b = \sqrt{ab}$, qui consiste à prendre la moyenne proportionnelle entre deux quantités, est commutative; mais, $\sqrt{\sqrt{ab}.c}$ n'étant pas $= \sqrt{a.\sqrt{bc}}$, l'opération n'est pas associative.

Si l'on désigne par a et b les rotations d'un système rigide de points autour de deux axes concourants, considérées *en grandeur et en direction,* et par $a \frown b$ la rotation unique qui peut remplacer l'effet combiné des deux premières effectuées consécutivement, on aura bien, pour trois rotations de cette espèce,

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c);$$

mais on n'aura pas

$$a \frown b = b \frown a,$$

tant que les deux axes de rotation ne se confondront pas en un seul; donc l'opération de la composition des rotations est associative, mais elle n'est pas en général commutative.

La multiplication est complétement distributive relativement à l'addition.

L'élévation aux puissances $a \frown b = a^b$ est distributive relativement à la multiplication $a \uparrow b = a \times b$, par rapport à son premier terme seulement; car on a

$$(a \uparrow b) \frown c = (a.b)^c = a^c.b^c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c);$$

mais $a \frown (b \uparrow c) = a^{b.c}$ n'est pas égal à $(a \frown b) \uparrow (a \frown c) = a^b.a^c$.

15. Étant donné l'un des éléments a ou b d'une opération avec le résultat c, par l'égalité

$$a \frown b = c,$$

l'opération qui sert à trouver l'élément inconnu au moyen de l'élément connu et du résultat est dite une opération *inverse* de la première.

Si l'opération directe $\frown$ est commutative, il est alors indifférent que ce soit le premier ou le second terme qui soit donné, et par suite l'opération directe n'aura qu'une seule opération inverse, que nous désignerons par le signe $\smile$ (*combiné inversement avec*). On aura ainsi

$$b = c \smile a, \quad \text{et} \quad a = c \smile b.$$

Tel est le cas de l'addition et de la multiplication et de leurs opérations inverses, la soustraction et la division.

Mais si l'opération directe n'est pas commutative, il y aura deux opérations inverses distinctes, que nous pourrons représenter par les symboles $\smile$ et $\frown$, de sorte que, pour $a \frown b = c$, on aura

$$(1) \qquad b = c \smile a \quad \text{et} \quad a = c \frown b.$$

Pour distinguer ces deux opérations $\smile$ et $\frown$, nous les appellerons les opérations inverses *relatives au premier terme* ou *au second terme*.

Ainsi l'opération $a^b = c$ de l'élévation de a à la puissance b, n'étant pas commutative, donnera lieu aux deux opérations inverses distinctes

$$b = \log_a c \quad \text{et} \quad a = \sqrt[b]{c}.$$

16. En combinant l'égalité $a \frown b = c$ avec la première égalité (1), on en tire, en changeant ensuite c en b, les deux identités

$$(2) \qquad a \frown b \smile a = b, \quad a \smile b \frown a = b,$$

qui peuvent être considérées comme définissant la relation de réciprocité des opérations $\frown$ et $\smile$.

On tire de même de la seconde égalité (1), en changeant c en a, les identités

$$(3) \qquad a \frown b \frown b = a, \quad a \smile b \smile b = a,$$

qui définissent la relation entre les opérations $\frown$ et $\frown$.

Si l'opération $\frown$ est commutative, l'opération $\frown$ se confond avec $\smile$, et les identités (3), qui deviennent

$$(4) \qquad a \smile b \smile b = a, \quad a \frown b \frown b = a,$$

se déduisent immédiatement des identités (2), en échangeant entre elles les lettres a et b, et permutant les deux termes de l'opération $\frown$.

17. Les propriétés combinatoires des opérations inverses dépendent de celles des opérations directes.

Si l'opération directe est telle que le résultat varie lorsqu'on fait varier un seul des termes, a par exemple, alors, b et c restant les

mêmes, l'égalité $a \frown b = c$ ne peut subsister si a ne reste pas le même; donc alors l'opération inverse qui donne $a = c \smile b$ est *uniforme*. De même si, b variant seul, c varie en même temps, l'autre opération inverse, qui donne $b = c \smile a$, sera pareillement uniforme.

Lorsque les deux opérations inverses d'une opération $\frown$ sont l'une et l'autre uniformes, on dit que l'opération $\frown$ est *complétement uniforme*.

En Arithmétique, l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances sont trois opérations complétement uniformes.

Nous verrons, au contraire, qu'au point de vue de l'Algèbre généralisée, l'opération a^b n'est plus complétement uniforme, même pour b entier; car, le résultat ne changeant pas soit lorsqu'on multiplie a par une des racines $b^{\text{ièmes}}$ de l'unité, soit lorsqu'on augmente b d'un multiple quelconque de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log a}$, a^b prend la même valeur pour des valeurs différentes de l'un ou de l'autre des deux termes. Il en résulte que les deux opérations inverses $\sqrt[b]{c}$ et $\log_a c$ ne sont pas uniformes.

§ IV.

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ASSOCIATIVES.

18. Les opérations fondamentales que nous aurons à étudier étant généralement associatives, nous allons examiner les principales propriétés qui découlent de l'associativité, jointe ou non à la commutativité.

Nous appellerons *module* d'une opération $\frown$ un objet m qui, combiné par l'opération $\frown$ avec un objet quelconque a, donne pour résultat l'objet a lui-même, de sorte que l'on ait, quel que soit a,

$$a \frown m = a. \tag{5}$$

Pour l'addition, $m = 0$; pour la multiplication, $m = 1$.

19. On a, l'opération $\frown$ étant supposée associative,

$$a \frown (m \frown b) = (a \frown m) \frown b = a \frown b;$$

d'où, en supposant l'opération $\frown$ complétement uniforme,

$$m \frown b = b;$$

donc l'équation (5), jointe aux propriétés d'associativité et d'uniformité complète, entraîne l'équation

$$m \frown a = a, \tag{6}$$

c'est-à-dire que la propriété du module subsiste, qu'on le prenne pour premier terme ou pour second terme de la combinaison.

20. Si l'on désigne maintenant par $\smile$ l'opération inverse relative au premier terme et définie par la première équation (1), c'est-à-dire telle que l'on ait

$$b = a \frown a = a \frown b \frown a, \tag{7}$$

il viendra (6)

$$a \smile m = m \frown a = m \frown a = a; \tag{8}$$

donc le module, combiné avec a par l'opération inverse $\smile$, reproduit encore a.

Il en serait de même si l'on considérait l'autre opération inverse $\underline{\smile}$.

21. D'après l'identité (7), on a, en vertu de (5),

$$a \frown m \smile a = a \frown m = a = a;$$

donc on obtient le module d'une opération $\frown$ en exécutant l'opération inverse $\smile$ sur un objet quelconque combiné avec un objet identique à lui. Par exemple, pour l'addition, $m = a - a = 0$; pour la multiplication, $m = \frac{a}{a} = 1$.

22. Nous venons de voir que chacune des trois combinaisons $a \frown m$, $m \frown a$, $a \smile m$ se réduit à a. Il reste à examiner la combinaison $m \smile a$, qui n'a plus la même propriété. Nous appellerons le résultat de cette combinaison l'*objet réciproque* de l'objet a, et nous le représenterons par la notation

$$m \smile a = \bar{a}.$$

Pour l'addition, l'objet réciproque de a sera $0 - a = -a$; pour la multiplication, ce sera $\frac{1}{a}$.

On tire de là, par la seconde identité (2),

$$a \frown \bar{a} = a \frown (m \smile a) = m.$$

23. Les deux objets a et $\bar{a}$ sont en relation de réciprocité mutuelle. En effet, en posant

$$m \smile \bar{a} = x,$$

il en résulte, par définition,

$$m = \bar{a} \frown x,$$

et par suite, *en opérant par* $a \frown$ sur les deux membres, et ayant égard à la propriété associative de l'opération $\frown$,

$$a \frown m = a \frown (\bar{a} \frown x) = [a \frown (m \smile a)] \frown x,$$

ou, en vertu de la seconde identité (2) et des égalités (5) et (6),

$$a = x = m \smile \bar{a}.$$

On conclut de là

$$\bar{a} \frown a = \bar{a} \frown (m \smile \bar{a}) = m = a \frown \bar{a}.$$

L'opération $\frown$, faite sur deux objets réciproques, est donc commutative.

24. L'introduction des objets réciproques permet de changer une opération dans son inverse. En effet :

1° Si l'on pose $a \smile b = x$, on en conclut, par définition,

$$a = b \frown x, \tag{9}$$

d'où, l'opération $\frown$ étant supposée associative,

$$\bar{b} \frown a = \bar{b} \frown (b \frown x) = (\bar{b} \frown b) \frown x = m \frown x = x;$$

donc

$$a \smile b = \bar{b} \frown a, \tag{10}$$

et réciproquement, en échangeant entre elles les lettres a et b,

puis remplaçant a par l'objet réciproque $\bar{a}$,

$$a \frown b = b \frown \bar{a}. \tag{11}$$

Si l'opération $\frown$ est commutative, on a, de plus,

$$a \frown b = a \frown b, \quad a \frown b = a \frown \bar{b}. \tag{12}$$

2° De l'égalité (9) on tire

$$a \frown \bar{x} = b \frown x \quad \bar{x} = b \frown x \frown \bar{x} = b \frown (x \frown \bar{x}) = b \frown u = u, \tag{13}$$

d'où

$$\bar{x} = b \frown a;$$

donc $a \smile b$ et $b \smile a$ sont deux objets réciproques.

3° Des égalités précédentes on tire les suivantes :

$$\overline{a \frown b} = b \frown \bar{a} = b \frown a = \overline{a \frown b}; \tag{14}$$

donc les deux objets $\bar{a} \smile b$ et $\bar{b} \frown \bar{a}$ sont égaux au réciproque de $a \frown b$.

Ainsi $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{ab}$.

Si l'opération $\frown$ est commutative, les égalités (14) donnent encore

$$a \frown b = \overline{a \frown b},$$

c'est-à-dire que l'on obtient l'objet réciproque de $a \frown b$ en remplaçant a et b par leurs réciproques.

A l'aide de la notation des objets réciproques, on pourra maintenant remplacer partout l'opération inverse $\smile$ par l'opération directe $\frown$, que nous supposons associative, ce qui permet de ramener le calcul des opérations inverses à celui des opérations directes.

25. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'opération directe $\frown$, pratiquée sur une série d'objets

$$a, \ b, \ c, \ \ldots, \tag{A}$$

était toujours possible, et donnait pour résultat un objet appartenant à cette même série, que nous appellerons la *série directe*.

Mais il pourra bien se faire que l'opération inverse ne soit pas toujours possible aux mêmes conditions. Par exemple, si la série (A) se compose des nombres positifs et entiers, les résultats des opérations $a - b$ et $\frac{a}{b}$ pourront bien ne pas être exprimables par les nombres de cette série.

L'opération inverse $\smile$ sera, dans ce cas, *impossible*, à moins que ne l'on puisse ajouter à la série (A) une série complémentaire, et que les opérations, directe et inverse, ne puissent être généralisées de manière à s'appliquer aux objets de la nouvelle série, et à faire passer d'une série à l'autre. C'est à cette condition que la définition des objets réciproques, donnée au n° **22**, peut être acceptable dans tous les cas.

26. Supposons que l'opération directe, ainsi généralisée, conserve sa propriété associative, ce que l'on devra vérifier dans chaque cas particulier. Dès lors toutes les formules établies jusqu'ici et fondées sur cette propriété continueront à subsister.

En particulier, il résulte du numéro précédent que les deux objets $a \smile b$ et $b \smile a$ seront encore réciproques l'un de l'autre.

Si donc l'une de ces opérations est exécutable au moyen des objets de la série directe (A), l'autre opération conduira à un objet de la série

$$(\bar{A}) \qquad \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \ldots,$$

formée avec les objets réciproques de ceux de la première, et que nous appellerons la *série réciproque*.

S'il en est ainsi, toutes les égalités des n^{os} **23** et **24** auront lieu pour l'ensemble des séries (A), $(\bar{A})$, et l'on pourra, en remplaçant un objet de l'une par son correspondant dans l'autre, transformer toute opération dans l'opération inverse.

§ V.

DE LA PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE.

27. Si nous supposons l'opération $\sim$ complètement distributive (13) relativement à l'opération $\uparrow$, on aura alors

$$\begin{aligned} a \uparrow b \sim c \uparrow d &= (a \sim c \uparrow d) \uparrow (b \sim c \uparrow d) \\ &= (a \sim c \uparrow a \sim d) \uparrow (b \sim c \uparrow b \sim d) \\ &= (a \uparrow b \sim c) \uparrow (a \uparrow b \sim d) \\ &= (a \sim c \uparrow b \sim c) \uparrow (a \sim d \uparrow b \sim d), \end{aligned}$$

et, pour que ces diverses formes du résultat s'accordent entre elles, il faut et il suffit que l'opération $\uparrow$ soit associative et commutative. On obtient dans ce cas, pour la combinaison des opérations $\sim$ et $\uparrow$, une règle qui contient comme cas particulier la règle de la multiplication des polynômes.

28. Considérons maintenant les objets de la série $(\bar{A})$, réciproque de (A) par rapport à l'opération $\uparrow$ [1]. En faisant $b = a$ dans l'égalité

$$a \uparrow b \sim c = (a \sim c \uparrow b \sim c),$$

il vient [23], μ étant le module de l'opération $\uparrow$,

$$a \uparrow \bar{a} \sim c = (a \sim c \uparrow \bar{a} \sim c) = \mu \sim c,$$

et, si l'opération $\sim$ est telle que l'on ait [2]

$$\mu \sim c = \mu, \tag{15}$$

on en conclura

$$a \sim c \uparrow (\bar{a} \sim c) = \mu,$$

d'où, en désignant par $\downarrow$ l'opération inverse de $\uparrow$, et opérant

---

[1] Par exemple, si $\uparrow$ est le signe $+$ de l'addition, la série $(\bar{A})$ sera la série des quantités négatives.

[2] Pour $\uparrow = +$ et $\sim = \times$, on a $\mu = 0$, et alors $\mu \sim c = 0 \times \mu$, $a \sim c = 0 \times a$.

par $\downarrow (a \frown c)$ sur les deux membres, il vient [16 et 22]

$$(16) \qquad \bar{a} \frown c = \mu \downarrow (a \frown c) = \overline{a \frown c},$$

c'est-à-dire que $\bar{a} \frown c$ est l'objet réciproque de $a \frown c$ par rapport à l'opération $\uparrow$.

Posant de même $c = \bar{b}$ dans l'égalité

$$a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c),$$

et admettant que l'opération $\frown$ soit telle que l'on ait [1]

$$(17) \qquad a \frown \mu = \mu,$$

on trouvera

$$(18) \qquad a \frown \bar{b} = \overline{a \frown b},$$

c'est-à-dire que $a \frown \bar{b}$ est le réciproque de $a \frown b$.

Enfin on a, dans l'hypothèse de la distributivité complète, à cause des relations (16) et (18), et en admettant les égalités (15) et (17),

$$\begin{aligned}(a \uparrow \bar{a}) \frown (b \uparrow \bar{b}) &= \mu \frown \mu = \mu \\ &= (a \frown b) \uparrow (a \frown \bar{b}) \uparrow (\bar{a} \frown b) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= (a \frown b) \uparrow \overline{(a \frown b)} \uparrow \overline{(a \frown b)} \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= \mu \uparrow \overline{(a \frown b)} \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) = \overline{(a \frown b)} \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}),\end{aligned}$$

d'où, en opérant par $\downarrow \overline{(a \frown b)}$,

$$\bar{a} \frown b = \mu \downarrow \overline{(a \frown b)} = a \frown b.$$

Exemples :

$$\begin{aligned}(-b) \times c &= -(b \times c), \\ a \times (-c) &= -(a \times c), \\ (-a) \times (-b) &= a \times b.\end{aligned}$$

29. Les principes précédents permettront de traiter la combinaison de l'opération $\uparrow$ avec l'opération $\frown$ inverse de l'opération

---

[1] *Voir* la note précédente.

associative et distributive $\frown$. Il suffira, pour cela, de remplacer l'opération inverse $\smile$ par l'opération directe $\frown$, au moyen des formules du n° **24**, de manière à n'introduire que des opérations associatives.

En particulier, si l'opération $\frown$ est commutative, on aura [**24** et **23**], en désignant par b, d les réciproques de b, d par rapport à l'opération $\frown$,

$$\begin{aligned}(b \frown d) \frown (a \frown b) + (c \frown d) &= [(b \frown d) \frown a] \frown b] + [(b \frown d) \frown c] \frown d] \\ &= [(b \frown d) \frown a] \frown b] + [(b \frown d) \frown c] \frown d] \\ &= (a \frown d) + (b \frown c),\end{aligned}$$

d'où, en opérant par $\smile(b \frown d)$,

$$(a \frown b) + (c \frown d) = [(a \frown d) + (b \frown c)] \frown (b \frown d),$$

formule qui contient la réduction des fractions au même dénominateur.

CHAPITRE II.

GÉNÉRALISATION SUCCESSIVE DE L'IDÉE DE QUANTITÉ.

§ I.

DES QUANTITÉS ARITHMÉTIQUES.

30. Pour qu'un objet puisse être considéré au point de vue de la *grandeur* ou *quantité*, et rentrer ainsi dans le domaine des Mathématiques, il faut d'abord qu'il puisse être conçu comme formé de parties susceptibles d'une définition commune, en vertu de laquelle elles soient regardées comme de nature homogène.

Une quantité peut se former au moyen de quantités de même nature, de deux manières différentes : soit par la réunion de quantités individuelles identiques entre elles [1] et pouvant se *compter*, c'est alors une quantité *discrète* ou *numérique;* soit par l'accroissement continu d'éléments homogènes et divisibles à l'infini, c'est alors une quantité *concrète* ou *continue*.

31. L'étude mathématique des quantités discrètes se ramène à celle de leur loi de formation au moyen de leurs éléments. Cette loi s'appelle *nombre*, et chacun des éléments s'appelle *unité*. Une quantité discrète est considérée comme entièrement connue, quand on connaît son unité et le nombre des unités qu'elle contient.

La seule hypothèse que la théorie des quantités discrètes puisse emprunter à l'expérience, et qui comporte un certain arbitraire, est celle de l'*égalité* des diverses unités [30]. Cette égalité admise, la comparaison des quantités discrètes et leur transformation les unes

[1] C'est-à-dire satisfaisant chacune à la définition générale de leur ensemble. Ainsi deux animaux et trois arbres formeront un ensemble de cinq *êtres organisés*.

dans les autres se ramènent, avec une certitude complète, à la comparaison et à la transformation des *nombres* qui les représentent, c'est-à-dire des *opérations* à l'aide desquelles chacune est formée par l'agglomération de ses éléments ou unités.

Ainsi, dans la science qui a pour objet l'étude des quantités discrètes, dans l'*Arithmétique*, on opère toujours sur des abstractions, sur des symboles d'opérations, les nombres, sans avoir égard à la nature spécifique des unités et des quantités qui en sont formées. Ces symboles se combinent suivant des lois simples et rigoureuses, reposant entièrement sur l'hypothèse de l'égalité des unités.

Les calculs de l'Arithmétique s'appliquent non-seulement aux quantités essentiellement discrètes, composées d'individus indivisibles, mais encore aux valeurs des quantités continues qui peuvent être formées par la multiplication d'une même unité, et par suite exprimées par des nombres proprement dits.

Les lois qui président à la combinaison des opérations de l'Arithmétique sont ce que nous avons appelé leurs *propriétés combinatoires* [5].

32. De ce que les diverses unités d'une même quantité peuvent se remplacer mutuellement, résultent immédiatement les propriétés combinatoires de l'addition, lesquelles peuvent s'exprimer par les formules suivantes :

1° Si l'on a $a = a'$ et $b = b'$, il en résulte $a + b = a' + b'$. L'addition est une opération *uniforme*.

2° $a + b = b + a$. L'addition est une opération *commutative*.

3° $(a + b) + c = a + (b + c)$. L'addition est une opération *associative*.

4° $a + 0 = a$. Si l'un des termes s'évanouit, la somme se réduit à l'autre terme; autrement dit, le *module* de l'addition [18] est zéro (¹).

33. La multiplication étant une addition de quantités égales, on déduit des propriétés de l'addition celles de la multiplication :

1° Pour $a = a'$ et $b = b'$, on a $a \times b = a' \times b'$. La multiplication est *uniforme*.

(¹) Cela revient à dire qu'une quantité est considérée comme nulle et représentée par zéro, quand son addition à une autre quantité n'altère pas celle-ci.

2° $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$. Elle est *distributive relativement à l'addition.*

3° $a\times b=b\times a$. Elle est *commutative.*

4° $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$. Elle est *associative.*

5° $a\times 0=0$. Si l'un des facteurs s'annule [1], le produit s'annule.

6° $a\times 1=a$. Si l'un des facteurs est égal à l'unité, le produit se réduit à l'autre facteur; le *module* de la multiplication est l'unité.

C'est uniquement sur ces propriétés que sont fondées les règles de l'addition et de la multiplication, sans que l'on ait autrement à s'occuper de la signification de ces opérations et de leurs effets.

34. L'addition et la multiplication, étant des opérations commutatives, ont chacune une seule opération inverse. Elles sont *complétement uniformes* [17], et par suite leurs opérations inverses, la soustraction et la division, sont uniformes.

L'élévation aux puissances est aussi complétement uniforme, et ses deux opérations inverses, l'extraction des racines et la détermination des logarithmes, sont uniformes.

35. Mais, tandis que les opérations directes, effectuées sur des nombres entiers, sont toujours possibles et donnent pour résultat d'autres nombres entiers, il n'en est pas de même des opérations inverses.

La soustraction est impossible et n'a aucun sens, au point de vue de la grandeur absolue, lorsque le terme soustractif est le plus grand des deux.

La division n'est pas possible, le plus souvent, si l'on ne fait usage que de la série des nombres entiers. Elle devient possible si les unités sont considérées comme divisibles elles-mêmes en un nombre quelconque de parties égales.

36. La divisibilité de l'unité permet d'insérer, entre les termes de la série des grandeurs exprimées par les nombres entiers, une infinité d'autres grandeurs, formées par la double opération de la multiplication et de la division de l'unité.

---

[1] Le zéro étant défini par la note précédente.

On prouve d'abord que ces deux opérations sont commutatives entre elles.

La loi de formation de ces grandeurs intermédiaires, exprimée au moyen de deux nombres, un multiplicateur et un diviseur, est considérée, par généralisation, comme étant un nombre d'une nouvelle espèce, comprenant, comme cas particulier, le nombre entier. On appelle un tel nombre un *nombre fractionnaire* ou une *fraction*.

Le module de la multiplication étant l'unité, les fractions, telles que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, exprimant l'opération inverse de la multiplication, pratiquée sur le module 1, forment [26] la série des quantités *réciproques* des nombres entiers $2, 3, 4, \ldots$. Au moyen de ces quantités réciproques, on peut changer toute division en une multiplication, et *vice versa*.

37. L'avantage qu'il y a à exprimer dans un même énoncé les règles pour la résolution des questions analogues, posées sur des nombres entiers et sur des nombres fractionnaires, a conduit à étendre aux fractions les dénominations des opérations définies pour les nombres entiers, en généralisant convenablement leur définition. Ces nouvelles opérations, conformément au principe de permanence, contiennent les premières comme cas particuliers; de plus, elles jouissent des mêmes propriétés combinatoires; donc les formules algébriques, établies pour les nombres entiers, subsisteront encore quand on remplacera les entiers par des fractions.

38. L'élévation aux puissances entières d'un nombre entier ou fractionnaire est toujours possible. Au contraire, les deux opérations inverses, celles qui conduisent aux racines et aux logarithmes, sont le plus souvent impossibles, tant que l'on ne considère que les entiers et les fractions, c'est-à-dire les nombres *commensurables avec l'unité*.

Mais, s'il n'existe aucun nombre commensurable x tel que l'on ait $x^m = a$, on pourra trouver, du moins, une suite de nombres, $x', x'', \ldots$, commensurables avec l'unité, et tels que $x'^m, x''^m, \ldots$ finissent par différer de a aussi peu que l'on voudra. On appellera ces nombres des *valeurs approchées* de la racine $m^{\text{ième}}$ de a.

39. Si l'on choisit, pour représenter les nombres entiers ou frac-

tionnaires, des valeurs d'une grandeur continue, d'une distance rectiligne par exemple, formées avec l'unité de cette grandeur suivant la loi exprimée par ces nombres, on pourra représenter de cette manière le nombre a, les valeurs approchées de sa racine $m^{\text{ième}}$ x', x'', ..., et les $m^{\text{ièmes}}$ puissances de ces valeurs x'^m, x''^m, ... Si l'on porte ces dernières, ainsi que a, sur une même direction à partir d'une même origine, et qu'on en fasse autant pour x', x'', ..., tandis que les extrémités de x'^m, x''^m, ... s'approcheront aussi près que l'on voudra de l'extrémité de a, les extrémités de x', x'', ... tendront vers une *limite*, qu'elles détermineront avec une approximation indéfinie. Cette limite, tant au point de vue de la pratique qu'à celui de la théorie, est considérée comme déterminée quand on connaît la loi de formation de ses valeurs indéfiniment approchées.

La loi de formation de x au moyen de l'unité, déterminée par la loi de formation de ses valeurs approchées, est, par une nouvelle généralisation, considérée comme un nombre, que l'on désigne sous le nom de *nombre incommensurable*, c'est-à-dire de loi de formation au moyen de l'unité d'une quantité incommensurable avec cette unité.

40. Nous verrons, en traitant de la théorie des *limites*, que les opérations exécutées sur les valeurs approchées donnent des résultats qui, représentés par les valeurs d'une grandeur continue, tendront vers une limite égale au résultat qu'aurait l'opération concrète correspondante, exécutée directement sur la valeur qui représente la limite $\sqrt[m]{a}$. Par exemple, les cubes construits sur les lignes qui représentent les valeurs approchées de $\sqrt{2}$, tendront indéfiniment vers le cube construit sur la diagonale du carré de l'unité de longueur.

On conclut de là que l'on peut considérer les opérations comme s'appliquant aux nombres incommensurables eux-mêmes, et le principe des limites nous montrera que ces opérations conservent les propriétés des opérations sur les nombres commensurables.

On est conduit à assimiler les racines et les puissances des racines à des puissances fractionnaires, et à généraliser ainsi le calcul des exposants. On passe de là à la considération des exposants incommensurables.

41. Ayant comblé par ce moyen toutes les lacunes qui existaient dans la suite des nombres commensurables, on pourra désormais considérer la série des nombres, tant commensurables qu'incommensurables, comme formant une suite continue, pouvant représenter la loi de formation de toute valeur d'une grandeur continue au moyen de son unité.

On démontre alors que, si l'on fait varier l'exposant d'une puissance d'une manière continue, la puissance varie pareillement d'une manière continue. De là la possibilité d'exprimer tout nombre plus grand ou plus petit que l'unité par une puissance convenable d'un nombre arbitraire appelé *base*, respectivement plus grand ou plus petit que l'unité. L'exposant de cette puissance est le logarithme du nombre donné par rapport à la base choisie.

42. L'introduction des nombres fractionnaires et des nombres ncommensurables permet maintenant de représenter par des symboles numériques non-seulement les quantités discrètes, mais encore les quantités continues, considérées comme formées par la réunion d'unités de leur espèce, ou de parties aliquotes de cette unité, ou comme limites de quantités commensurables formées de cette manière. L'unité, à la différence de celle des quantités discrètes, est ici entièrement arbitraire, et toute relation dans laquelle cette unité n'a pas été particularisée doit être nécessairement *homogène*.

43. Mais les généralisations de la notion de nombre introduites jusqu'ici sont encore insuffisantes, en s'en tenant même aux opérations purement arithmétiques et toujours exécutables. Ainsi la division de deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre est toujours possible, tandis que la règle de la soustraction des exposants, applicable au cas où l'exposant du dividende est le plus grand, ne peut plus servir au cas où cet exposant est le plus petit. Il résulte de là que, pour une base plus grande que l'unité, les nombres moindres que l'unité n'ont pas de logarithmes, à moins que l'on ne change dans ce cas la définition du logarithme, ce qui présenterait de graves inconvénients.

On écarte ces inconvénients et d'autres analogues, qui se rencontreraient dans l'application du calcul aux grandeurs continues, par une nouvelle généralisation de la notion de quantité, consistant

dans l'introduction des quantités *négatives*, ou, plus exactement, par l'incorporation de l'idée de direction dans le symbole représentatif de la grandeur.

§ II.

DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES RÉELLES. — REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES POINTS D'UN ESPACE A UNE DIMENSION. — THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

44. Les différents états d'une grandeur arithmétique peuvent être représentés par les distances des divers points d'une droite, indéfinie dans un seul sens, à son point initial pris pour origine. La valeur numérique de chaque distance sera la *cote* du point correspondant.

A l'addition arithmétique de deux cotes a, b (*fig.* 1) correspond

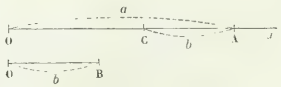
Fig. 1.

une opération géométrique, qui consiste à porter la longueur $OB = b$ à partir de l'extrémité A de $OA = a$, dans le sens Ox des longueurs croissantes, ce qui donne la somme

$$OC = a + b = c.$$

A l'opération inverse de l'addition, c'est-à-dire à la soustraction, correspondra une opération géométrique (*fig.* 2) qui consiste à

Fig. 2.



porter la quantité à soustraire b à partir de l'extrémité A de $OA = a$, dans le sens contraire de celui des longueurs croissantes, ce qui donne la différence

$$OC = a - b = c.$$

Si la quantité à soustraire b était plus grande que a, la construction géométrique montrerait l'*impossibilité* de l'opération, l'extrémité C de la longueur $AC = b$ tombant, dans ce cas, au delà de l'extrémité O de la ligne Ox et, pour ainsi dire, dans le vide, et la ligne Ox n'ayant plus, à gauche du point O, aucune place pour recevoir cette extrémité C.

45. Considérons maintenant une série de points, formant un espace à une dimension, indéfini dans les deux sens. On pourra représenter par une telle série toute espèce de quantité variable à l'infini dans deux sens opposés, c'est-à-dire tout système de deux séries de grandeurs se faisant suite l'une à l'autre sans interruption, et telles que la même opération qui accroît les grandeurs de l'une des séries fasse décroître celles de l'autre, et puisse faire passer d'une manière continue de l'une des séries à l'autre.

Outre les grandeurs géométriques, on peut citer comme exemples de pareilles séries indéfinies dans les deux sens la température, l'état électrique d'un corps, l'état de fortune d'après le doit et l'avoir, etc.

Il s'agit, dans ce cas, de déterminer la *position* d'un point dans une série de cette espèce. Cette détermination n'est plus identique avec une simple détermination de *grandeur*, comme dans le cas d'une série indéfinie dans un seul sens; mais on peut la ramener à une détermination de grandeur en y joignant une indication de direction.

Pour cela, prenons pour *origine* un point de la ligne, généralement arbitraire. Chaque point de la ligne sera alors déterminé quand on connaîtra : 1° sa distance à l'origine; 2° le sens dans lequel on devra porter cette distance à partir de l'origine. La cote de chaque point se composera donc d'un nombre accompagné d'un signe de direction.

46. Si l'on s'avance, à partir d'un point A, dans le sens OAx, d'une certaine quantité $AC = b$, la cote du point obtenu C sera la somme $a - b$ des longueurs OA, AC, affectée du même signe de direction que OA.

Si l'on porte, à partir de l'extrémité A de a, la longueur $OB = b$ en sens contraire de la direction OA, et que l'extrémité de $AC = OB$ tombe du même côté de O que le point a ce qui aura lieu lorsque

b sera $< a$), la cote du point C sera, comme au n° **44**, la différence $a - b$ affectée du même signe de direction que OA.

Mais, si b est $> a$, l'extrémité C tombera de l'autre côté de O par rapport à A, et, l'axe xOx' (*fig.* 3) se prolongeant aussi

Fig. 3.

de ce côté, l'opération ne sera plus impossible, comme elle l'eût été dans le cas d'un axe prolongé dans un seul sens. La cote du point C sera la différence $b - a$ affectée du signe de direction contraire à celui de OA.

On voit donc que, à une seule et même opération concrète, correspondent, pour la détermination des cotes, deux opérations abstraites, différentes suivant la grandeur relative des deux quantités considérées.

47. Pour éviter cet inconvénient et n'avoir qu'une règle unique à suivre, ramenons le second cas au premier, qui était le seul possible pour les quantités arithmétiques. Donnons le nom de direction *positive* à celle que nous consacrerons à la représentation des quantités arithmétiques, et celui de direction *négative* à la direction opposée. Appelons *addition* d'une quantité b l'opération concrète qui consiste à s'avancer de la distance b dans le sens *positif; soustraction* celle qui consiste à s'avancer de la distance b dans le sens *négatif*. Considérons maintenant la cote d'un point *unie à son signe de direction,* comme formant une nouvelle espèce de quantité, et appelons cette quantité *positive* ou *négative,* d'après le signe de direction.

Cela posé, étendons aux cotes mêmes les nouvelles définitions de l'addition et de la soustraction, en appelant, par exemple, *addition* des cotes de deux points A et B la recherche de la cote du point C tel que $OC = OA + OB$.

Si le point A se confond avec l'origine O, alors $a + b = 0 + b$ sera égal à b; $a - b = 0 - b$ sera désigné naturellement par $-b$. Ainsi $-b$ désignera la quantité b, changée de direction, comme

$+b$ désigne la même quantité prise avec sa direction primitive. On est ainsi conduit à prendre pour les signes de direction, que nous avons laissés jusqu'ici indéterminés, les signes $+$ et $-$ eux-mêmes, en affectant du signe $+$ les quantités positives, du signe $-$ les quantités négatives.

48. Ces conventions établies, on en tire aisément les règles de l'addition et de la soustraction algébriques.

Ainsi l'addition de deux quantités de même signe se fait en prenant la somme des valeurs numériques, et l'affectant du signe commun.

La soustraction de deux quantités positives se fait en prenant la différence des valeurs numériques et l'affectant du signe du plus grand terme.

Zéro étant le *module* de l'addition [18], les quantités négatives, obtenues en pratiquant sur ce module l'opération inverse de l'addition, formeront la série des quantités *réciproques* des quantités positives. On pourra donc, par l'introduction des quantités négatives, transformer toute soustraction en une addition, et *vice versa*. Ainsi l'on aura, a et b étant deux quantités quelconques, positives ou négatives, et $-a$, $-b$ leurs *réciproques*,

$$a - b = a + (-b), \quad a + b = a - (-b), \quad -a - b = -a + (-b), \quad -a + b = -a - (-b).$$

La soustraction se changeant ainsi, par l'incorporation du signe $-$ à la quantité à soustraire, en une addition, opération commutative et associative, on voit que rien n'empêche plus d'intervertir d'une manière quelconque l'ordre des termes d'un polynôme, quels que soient les signes de ces termes, et d'appliquer à ce polynôme toutes les réductions qui sont la conséquence de la propriété associative.

49. L'addition et la soustraction, ainsi généralisées au point de vue *algébrique*, satisfont d'abord au principe de la permanence des règles, puisque les règles du calcul des quantités positives sont identiques à celles du calcul des quantités arithmétiques.

L'addition algébrique possède, en outre, toutes les propriétés de l'addition arithmétique, énumérées au n° 32; donc elle suivra, dans ses transformations et ses combinaisons, exactement les mêmes

règles que l'addition arithmétique, de sorte que, dans les calculs concernant l'addition algébrique, on pourra toujours raisonner comme si l'on n'opérait que sur des grandeurs arithmétiques.

Il en est de même pour la soustraction.

50. L'addition de m quantités égales à $-a$ s'appelle la *multiplication de* $-a$ *par* m, et, d'après la règle de l'addition, on a

$$(-a)m = -(a.m).$$

Il est facile, à l'aide du raisonnement connu, d'étendre ce résultat au cas où l'entier m est remplacé par un nombre fractionnaire ou incommensurable b, de sorte que l'on a généralement

$$\pm a)b = \pm(a.b).$$

Pour que la multiplication soit commutative pour les quantités algébriques comme pour les quantités arithmétiques, il faudra prendre, pour définition de la multiplication par un multiplicateur négatif, l'égalité

$$a(-b) = -b)a,$$

qui donne pour résultat $-(ab)$ dans le cas de a positif. Donc, dans ce cas, la multiplication par $-b$ consiste à multiplier par $+b$, puis à changer le signe du produit.

En étendant maintenant cette règle au cas de a négatif, il vient

$$(-a)(-b) = -[(-a)(+b)] = -(-ab) = +a.b.$$

51. La multiplication des monômes étant ainsi complétement définie, et la règle des signes établie, on voit aisément que la multiplication algébrique est uniforme et associative, comme la multiplication arithmétique, et qu'elle satisfait comme elle aux deux conditions

$$a \times 0 = 0, \quad a \times 1 = a.$$

Elle est, de plus, distributive, comme on le voit en considérant d'abord le cas d'un multiplicateur positif et entier, puis passant de là au cas d'un multiplicateur quelconque. Cela résulte du raisonnement général que nous avons fait au n° 28.

Donc la multiplication algébrique est entièrement soumise aux règles de la multiplication des quantités arithmétiques, et par con-

séquent on peut, dans l'établissement des formules algébriques, raisonner comme si tous les résultats étaient des quantités arithmétiques.

52. On voit de même que la division est soumise aux mêmes règles et jouit des mêmes propriétés que pour les quantités arithmétiques.

La généralisation de la formule

$$a^{-} = \quad a \; a$$

conduit à la considération des exposants nuls et négatifs, comme la généralisation de la formule $a^{bc} = (a^b)^c$ a conduit [40] à la considération des exposants fractionnaires. Ainsi disparaissent les difficultés que nous avons signalées au n° 43, et il devient possible d'assigner des logarithmes à tous les nombres positifs, qu'ils soient plus grands ou plus petits que l'unité.

53. Toute puissance paire d'une quantité algébrique (positive ou négative) est positive; toute puissance impaire d'une quantité algebrique a le même signe que cette quantité. De là résulte que toute racine de degré pair d'une quantité positive a deux valeurs égales et de signe contraire, ou, comme nous dirons plus brièvement, deux valeurs *opposées*. Toute racine de degré impair a une seule valeur, de même signe que la quantité donnée. Une racine de degré pair d'une quantité négative est *impossible*, c'est-à-dire qu'elle ne peut exister pour les définitions des opérations telles qu'elles ont été établies au point de vue des quantités algébriques. C'est pour cela que l'on a donné à ces racines le nom de *quantités imaginaires*.

54. En général, en considérant les opérations au point de vue algébrique, c'est-à-dire en leur donnant l'extension correspondante à la définition des quantités qui représentent tous les points d'un espace à une dimension, indéfini dans les deux sens, on peut établir que :

Une équation algébrique du degré n a *au plus* n racines et peut n'en admettre aucune.

Tout nombre positif a un logarithme, positif ou négatif, par

rapport à une base positive quelconque. Un nombre négatif n'a pas de logarithme.

Tout arc, positif ou négatif, a un sinus positif ou négatif.

A tout sinus, compris entre -1 et $+1$, correspondent une infinité d'arcs. A un sinus dont la valeur numérique surpasse l'unité ne correspond aucun arc.

On a des propositions analogues pour les autres fonctions goniométriques.

Pour désigner d'une manière spéciale les quantités positives et négatives qui comprennent comme cas particulier les quantités arithmétiques, on leur donne le nom de quantités *réelles*, que nous leur conserverons, dans le cas même où nous envisagerons les opérations à un point de vue plus général, qui modifiera le sens primitif des dénominations de *réel* et d'*imaginaire*.

§ III.

REPRÉSENTATION DES POINTS D'UN ESPACE A DEUX DIMENSIONS AU MOYEN DES QUANTITÉS COMPLEXES. — OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR CES QUANTITÉS.

55. Supposons maintenant qu'il s'agisse de fixer la position d'une inconnue dans une série double. Nous représenterons cette série double par les divers points d'un espace à deux dimensions, c'est-à-dire d'une surface, que, pour plus de simplicité, nous supposerons plane.

La position d'un point A sur ce plan sera déterminée quand on connaîtra la grandeur et la direction d'une droite allant d'un point fixe O du plan à ce point A.

La cote du point A se composera des deux nombres qui exprimeront l'un la longueur de la droite OA, l'autre la grandeur de l'angle AOx que fait cette droite avec une direction fixe Ox. Cette cote, composée ainsi de deux nombres, s'appelle une *quantité complexe*.

On désigne une quantité complexe soit par les lettres qui indiquent les deux extrémités, initiale et finale, de la droite qui va de l'origine O au point considéré A, soit par les deux lettres qui représentent, l'une la longueur r du rayon vecteur OA, l'autre la

grandeur p de l'angle que ce rayon fait avec la direction fixe Ox, cet angle étant compté dans un sens convenu, et la seconde de ces lettres étant placée à droite et au bas de la première. On écrira ainsi

$$OA \text{ ou } r_p.$$

La longueur r s'appelle le *module*, l'angle p l'*argument* de la quantité complexe.

56. Deux quantités complexes représentent le même point et sont dites *égales*, lorsqu'elles ont des modules égaux et des arguments égaux.

Réciproquement, pour que deux quantités complexes représentent le même point, il faut nécessairement qu'elles aient le même module; mais, comme l'extrémité mobile d'un rayon vecteur de longueur invariable reprend la même position toutes les fois que le rayon a tourné autour de son extrémité fixe d'un nombre entier quelconque de circonférences, les arguments de deux quantités complexes égales pourront différer entre eux d'un multiple quelconque de 2π; donc l'égalité

$$r_p = r'_{p'}$$

entraînera seulement les deux égalités

$$r = r', \quad p' = p + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

57. Une quantité *arithmétique* ou *positive* quelconque peut être représentée par un segment pris, à partir de l'origine, sur la partie Ox de l'axe fixe; donc une quantité positive peut être considérée comme une quantité complexe dont l'argument est nul ou, plus généralement, multiple de la circonférence, et ainsi on la désignera par la notation

$$r \text{ ou } r_{2k\pi}.$$

De même, une quantité *négative* peut être regardée comme une quantité complexe correspondante à un segment compté sur le prolongement de xO au delà de O, et ayant, par conséquent, pour argument π ou un multiple *impair* de π; on pourra donc désigner

une quantité négative par

$$r_\pi \text{ ou } r_{(2k+1)\pi}.$$

On voit que les quantités *réelles* sont un cas particulier des quantités complexes, et qu'elles correspondent aux points de l'axe Ox et de son prolongement.

58. De même que, dans la théorie des quantités réelles, on considère comme toujours égale à elle-même (en grandeur et en signe) une droite de longueur invariable que l'on transporte d'une manière quelconque le long de son prolongement; de même, dans la théorie des quantités complexes, nous considérerons comme toujours *égale à elle-même* une figure plane que l'on transportera *parallèlement à elle-même,* et d'une manière d'ailleurs quelconque, dans son propre plan.

D'après cela, deux droites appelées, dans le langage de la Géométrie ordinaire, *égales et parallèles,* seront dites simplement *égales* lorsqu'on les considérera comme représentant des quantités complexes, ayant pour modules les longueurs de ces droites, et pour arguments les angles qu'elles font avec des parallèles à Ox.

59. *Addition et soustraction des quantités complexes.* — D'après la remarque du n° 57, l'addition des quantités complexes devant comprendre comme cas particulier celle des quantités réelles se fera en transportant le second terme de la somme parallèlement

Fig. 4.

à lui-même, de manière que son extrémité initiale vienne coïncider avec l'extrémité finale du premier terme. L'extrémité finale du second terme transporté représentera la somme. Ainsi, en menant AC égal et parallèle à OB (*fig.* 4), on aura

$$OA + OB = OA + AC = OC.$$

Cette construction est précisément celle que l'on emploie dans la composition des vitesses et des forces.

L'addition ainsi définie possède toutes les propriétés de l'addition arithmétique, énumérées au n° 32. Elle est uniforme, commutative et associative; de plus elle satisfait à la relation

$$a + 0 = 0,$$

pourvu que l'on considère une quantité complexe de module zéro comme étant égale à zéro. En effet, il est clair que l'addition d'une telle quantité à une autre n'altère en rien celle-ci.

60. De la définition de l'addition découle immédiatement celle de la soustraction. Si OC = OA + OB (*fig.* 5), on aura, par définition,

$$OA = OC - OB.$$

La soustraction s'opérera donc, comme pour les quantités réelles,

Fig. 5.

en transportant la quantité à soustraire OB parallèlement à elle-même, de manière que son extrémité *finale* coïncide avec l'extrémité *finale* de OC. L'extrémité initiale transportée en A représentera la différence OC — OB = OC — AC.

Cette construction est la même que celle qui servirait à ajouter à OC la quantité OB′ *opposée* à OB, c'est-à-dire obtenue en portant sur le prolongement de BO une longueur égale à BO. On peut donc ici, comme dans le cas particulier des quantités réelles, changer la soustraction en addition, en introduisant, à la place du terme à soustraire, la quantité *opposée* ou *réciproque*. De même, on peut réciproquement changer l'addition d'une quantité en soustraction de la quantité opposée.

La quantité opposée à r_p a pour argument $p + \pi$, ou, plus gé-

néralement, $p = (2k+1)\pi$; donc la soustraction de r_p équivaut à l'addition de $r_{p+(2k+1)\pi}$, et réciproquement.

En supposant nul le premier terme de la différence ou de la somme, cette règle donne

$$-r_p = +r_{p+(2k+1)\pi}.$$

On change donc de signe une quantité complexe, en augmentant ou diminuant son argument d'un nombre impair de demi-circonférences.

61. De la construction de l'addition résulte encore l'opération inverse de la *décomposition* d'une quantité complexe suivant deux directions données quelconques. Il suffira de faire un parallélogramme dont la quantité donnée OC soit la diagonale, et dont les côtés soient parallèles aux deux directions données; ceux des côtés qui partiront de l'extrémité initiale de OC, savoir OA et OB, seront dits les *composantes* de OC suivant les directions données.

En particulier, on pourra prendre pour ces directions celles de l'axe Ox et une direction perpendiculaire à cet axe. On obtiendra ainsi les *composantes rectangulaires* de la quantité r_p. L'une de ces composantes aura pour module la projection x de r sur Ox, et pour argument soit zéro, soit π; l'autre aura pour module la projection y de r sur Oy, perpendiculaire à Ox, et pour argument $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Ainsi les composantes rectangulaires de r_p seront

$$x_0 \text{ ou } x_\pi, \quad y_{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } y_{\frac{3\pi}{2}}.$$

62. Pour ajouter deux quantités r_p, r'_p de même argument, on ajoutera les modules et l'on donnera à la somme l'argument commun; ainsi

$$r_p + r'_p = (r + r')_p.$$

De même, pour $r > r'$,

$$r_p - r'_p = (r - r')_p.$$

Pour que cette formule soit applicable au cas où $r < r'$, on devra admettre l'emploi des modules négatifs, à la condition que l'on

prenne

$$r_{p+\pi} = -r_p = r_{p+\pi}.$$

A cette condition, on pourra, dans l'addition ou la soustraction des quantités de même module, traiter les modules comme des quantités *algébriques* susceptibles de signes.

Si l'on a à combiner par addition et soustraction des quantités toutes dirigées suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, et ayant pour arguments les unes p, les autres $p+\pi$, on pourra commencer par les ramener toutes au même argument p, en prenant négativement les modules correspondants à l'argument $p+\pi$. On opérera alors sur les modules d'après les règles de l'addition et de la soustraction algébriques, et l'on donnera au résultat l'argument p.

63. D'après cette règle, on donnera à toutes les composantes rectangulaires suivant Ox [61] l'argument zéro, en considérant le module x comme positif ou négatif suivant la règle du n° 48. Alors cette composante sera représentée dans tous les cas par x_0, ou simplement par x, en omettant l'argument lorsqu'il est nul.

De même, l'autre composante rectangulaire, suivant Oy, sera toujours représentée par $y_{\frac{\pi}{2}}$, le module y étant pris positivement dans la direction qui fait avec Ox l'angle $+\frac{\pi}{2}$, négativement dans la direction opposée.

Ainsi la décomposition d'une quantité complexe r_p dans ses composantes rectangulaires pourra toujours être représentée par l'égalité

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}.$$

64. L'addition de m quantités égales à r_p donne [62]

$$r_p + r_p + r_p + \ldots r_p = m.r_p;$$

donc, pour multiplier une quantité complexe r_p par un entier positif m, on multipliera le module par cet entier, en conservant l'argument.

De là, par le raisonnement connu, on passera au cas d'un multi-

plicateur positif quelconque a, de sorte qu'on aura, en général,

$$(1) \qquad r_p \times a = (a.r)_p.$$

Si le module r est négatif, il viendra

$$(-r)_p \times a = (+r)_{p+\pi} \times a = (+a.r)_{p+\pi} = (-a.r)_p = (-ar)_p;$$

donc la formule (1) est encore vraie dans le cas d'un module négatif.

Enfin, en étendant au cas d'un multiplicande complexe la définition donnée au n° 50 pour la multiplication par une quantité réelle négative, on aura

$$r_p \times (-a) = -[r_p \times (+a)] = -(a.r)_p = (r)_p \times (-a)_p,$$

ce qui étend la formule (1) au cas d'un multiplicateur réel quelconque.

65. D'après cela, toute quantité complexe r_p peut être considérée comme égale au produit obtenu en multipliant par son module r (positif ou négatif) la quantité complexe 1_p de même argument et ayant pour module l'unité. Cela résulte de l'identité

$$1_p \times r = r_p.$$

Cette quantité 1_p s'appelle le *coefficient de direction* de la quantité complexe r_p. Ainsi toute quantité complexe est le produit de son coefficient de direction par son module.

66. La composante rectangulaire $y_{\frac{\pi}{2}}$, perpendiculaire à Ox [63], peut donc se mettre sous la forme

$$1_{\frac{\pi}{2}} \times y.$$

Cette quantité $1_{\frac{\pi}{2}}$, qui est le coefficient de direction correspondant à l'argument $\frac{\pi}{2}$, jouant un rôle capital dans le calcul des quantités complexes, on lui a donné un nom spécial. On l'appelle l'*unité imaginaire*, et on la représente, pour abréger, par la lettre i. Ainsi l'équation qui exprime la décomposition de r_p en ses com-

posantes rectangulaires s'écrira sous la forme

$$r_p = x + iy.$$

67. Si l'on a plusieurs quantités complexes de même argument, et par suite de même coefficient de direction,

$$r_p = \mathbf{r}_p \times r, \quad r'_p = \mathbf{r}_p \times r', \quad \ldots,$$

leur somme $(r + r' + \ldots)_p$ [62] pourra s'écrire sous la forme

$$\mathbf{r}_p \times (r + r' + \ldots).$$

Il résulte de là et des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition [59] que la somme de plusieurs quantités complexes

$$r_p = x + iy, \quad r'_p = x' + iy', \quad \ldots,$$

décomposées en leurs composantes rectangulaires, peut s'obtenir en faisant la somme des parties réelles $x + x' + \ldots$, et la somme des parties imaginaires $iy + iy' + \ldots = i \times (y + y' + \ldots)$, de sorte que les composantes rectangulaires de la somme

$$r_p + r'_p + \ldots = (x + iy) + (x' + iy') + \ldots = (x + x' + \ldots) + i(y + y' + \ldots)$$

sont égales respectivement aux sommes des composantes de même nom des divers termes de la somme.

Pour qu'une quantité complexe soit nulle, il faut et il suffit que ses deux composantes rectangulaires soient nulles.

Donc, pour que la somme de plusieurs quantités complexes soit nulle, il faut et il suffit que la somme de leurs composantes réelles soit nulle, ainsi que la somme de leurs composantes imaginaires.

68. La construction de la somme de plusieurs quantités complexes se ramène à la construction d'un polygone, dont les côtés sont respectivement égaux, parallèles et de direction conforme aux lignes qui représentent les diverses quantités complexes. La somme est représentée par la ligne qui ferme le polygone.

La somme est nulle, quand le polygone se ferme de lui-même.

Comme on peut prendre pour l'axe Ox une ligne quelconque du plan, la condition établie au numéro précédent pour que la

somme des quantités complexes soit nulle, ou pour que le polygone se ferme, n'est autre chose que le théorème connu de Géométrie, que la somme des projections algébriques des côtés d'un contour fermé sur un axe quelconque est nulle.

69. On peut considérer 1_p comme représentant un quelconque des rayons d'un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité.

Les projections algébriques de ce rayon sur les axes rectangulaires Ox et Oy sont dites le cosinus et le sinus de l'angle p. En posant donc, dans la formule du n° 66,

$$r = 1, \quad x = \cos p, \quad y = \sin p,$$

on a

$$1_p = \cos p + i \sin p.$$

Comme on a, en général, $x^2 + y^2 = r^2$, on en conclut

$$\cos^2 p + \sin^2 p = 1.$$

Pour r quelconque, on a

$$r_p = 1_p \times r = (\cos p + i \sin p) \times r = r \cos p + i . r \sin p.$$

Donc, en général, les composantes rectangulaires de la quantité r_p ont pour expressions $r \cos p$ et $r \sin p$.

70. Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle; A, B, C les angles respectivement opposés; θ l'angle que fait le côté $AB = c$ avec la direction Ox. Les trois côtés a, b, c seront les modules de trois quantités complexes, dont les arguments seront $\theta + \pi - B$, $\theta + (\pi - B) + (\pi - c)$, θ, et dont la somme est nulle. On aura donc

$$AB + BC + CA = c_\theta + a_{\theta + \pi - B} + b_{\theta + \pi - B + \pi - C} = 0,$$

ou, en remarquant que $\pi - B - C = A$,

$$c_\theta = a_{\theta + B} + b_{\theta - A}.$$

En donnant à θ une suite de valeurs convenables, on tirera de cette égalité toutes les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, à l'addition des arcs, etc.

71. De la construction qui donne [59 et 68] la somme de deux

ou de plusieurs quantités complexes il résulte, en vertu des propriétés géométriques connues, que le module de la somme et celui de la différence de deux quantités complexes sont compris l'un et l'autre entre la somme et la différence des modules de ces quantités, et que le module de la somme d'un nombre quelconque de quantités est moindre que la somme des modules de ces quantités.

C'est ce qu'il est d'ailleurs facile de démontrer analytiquement. Le carré du module de la somme des quantités

$$r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

est égal [69] à

$$(1) \qquad (x+x')^2 + (y+y')^2 = r^2 + r'^2 + 2(xx' + yy').$$

On a d'ailleurs

$$r^2 r'^2 = (x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'+yy')^2 + (xy' - x'y)^2.$$

d'où l'on conclut que, la valeur numérique de $xx'+yy'$ étant moindre que celle des rr', le second membre de l'équation (1) est compris entre le carré de $r+r'$ et celui de $r-r'$.

72. Une série, dont les termes sont des quantités réelles, est *convergente,* lorsque la somme d'un nombre quelconque k de termes, pris à la suite du $n^{\text{ième}}$, est infiniment petite pour n infiniment grand. Le même caractère de convergence s'étend aussi aux séries à termes complexes, une quantité complexe étant dite *infiniment petite,* lorsque son module est infiniment petit.

Si nous représentons par

$$(1) \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

la série proposée, il faudra donc, et il suffira, que le module de la somme

$$(2) \qquad w_{n+1} + w_{n+2} + \ldots + w_{n+k}$$

soit infiniment petit, quel que soit k, pour n infiniment grand. Or ce module est moindre [**71**] que la somme des modules $r_{n+1}, \ldots, r_{n+k}$ des termes de la somme (2). Il en résulte que la série (1) sera convergente lorsque la somme

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots + r_{n+k}$$

sera infiniment petite, c'est-à-dire, lorsque la série

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$$

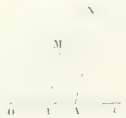
des modules des termes de la série (1) sera elle-même convergente, et cela, quels que soient les arguments des termes de la série (1).

On voit aisément que la convergence d'une série complexe entraîne la convergence des deux séries réelles qui ont pour termes soit les composantes réelles, soit les composantes imaginaires des termes de la série complexe.

73. *Multiplication des quantités complexes.* — Nous avons défini (64) la multiplication d'une quantité complexe par une quantité réelle, et la règle que nous avons donnée pour exécuter cette opération revient à la construction géométrique suivante.

Soit O1 la longueur qui représente l'unité, et que nous porterons sur la partie positive de l'axe Ox. Portons sur le même axe, dans la direction correspondante à son signe, le multiplicateur réel OA $= a$, et soit OM $= r_p$ (*fig.* 6) le multiplicande complexe. On

Fig. 6.



obtiendra le produit ON $= r_p \times a = (r.a)_p$, en construisant sur OA, homologue à O1, le triangle OAN semblable à O1M.

Voyons maintenant en quoi doit consister la généralisation de cette opération, et à quelle opération sur les cotes de deux quantités complexes on doit donner le nom de multiplication de ces quantités l'une par l'autre.

74. On peut considérer la quantité réelle a comme une quantité complexe de module a et d'argument zéro, et l'opération que nous venons d'effectuer sera représentée par

$$r_p \times a_0.$$

Si l'opération généralisée doit être commutative, il faudra que le

résultat précédent soit le même que celui de la multiplication

$$a_\alpha \times r_\beta,$$

et pour cela il faudra que la multiplication par r_β consiste : 1° à multiplier le module a du multiplicande par le module r du multiplicateur; 2° à faire tourner le rayon vecteur du multiplicande d'un angle égal à l'argument du multiplicateur.

En généralisant cette définition, nous dirons que le produit de deux quantités complexes est une quantité complexe ayant pour module le produit des modules des facteurs, et pour argument la somme de leurs arguments.

La multiplication ainsi généralisée correspond encore à la construction sur le multiplicande OA (*fig.* 7), homologue à l'unité O1,

Fig. 7.

d'un triangle OAN semblable au triangle O1M formé par l'unité et par le multiplicateur.

75. La multiplication généralisée, se composant de deux opérations algébriques, la multiplication des modules et l'addition des arguments, qui sont l'une et l'autre uniformes, commutatives et associatives, sera elle-même uniforme, commutative et associative, comme cela résulte d'ailleurs immédiatement de la construction précédente.

De plus, elle satisfait évidemment aux deux conditions [33]

$$a \times 0 = 0, \quad a \times 1 = a.$$

Je dis, en outre, que cette opération est distributive. Soient, en effet (*fig.* 8), OM et ON deux quantités complexes, et

$$OM = ON = OM + MP = OP$$

leur somme. Si l'on multiplie ces trois lignes par le module r du multiplicateur r_p, on obtiendra les côtés d'un triangle OM′P′, semblable à OMP, et dans lequel

$$OP' = OM' + M'P',$$

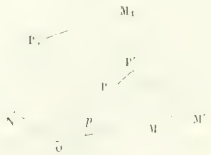
c'est-à-dire

$$OP \times r = OM \times r + MP \times r,$$

ce qui montre d'abord que la multiplication est distributive dans le cas d'un multiplicateur réel.

En faisant maintenant tourner un côté OM′ du triangle OM′P′ d'un angle égal à l'argument p du multiplicateur, les deux autres

Fig. 8.



côtés tourneront aussi chacun du même angle p; donc chacune des lignes OM, ON = MP, OP aura été, en vertu de cette double opération, multipliée par la quantité r_p, et par conséquent l'égalité $OP_1 = OM_1 + M_1P_1$ pourra s'écrire

$$OP \times r_p = OM \times r_p + ON \times r_p = OM \times r_p + ON \times r_p,$$

c'est-à-dire que l'opération est distributive par rapport au multiplicande. Comme elle est, en outre, commutative, on en conclut [13] qu'elle est complétement distributive.

Donc la multiplication des polynômes entiers formés avec des quantités complexes est soumise, ainsi que celle des monômes, à toutes les règles de la multiplication des quantités réelles.

76. De la règle de la multiplication il résulte que le carré de la quantité $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$ a pour valeur $1_\pi = -1$; donc i est la racine carrée de -1, prise au point de vue de la multiplication des quantités complexes.

On trouve par conséquent, pour les puissances successives de $i = \sqrt{-1}$,

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \quad \ldots,$$

et, en général, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

De $i^2 = -1$ on tire

$$\frac{1}{i} = -i.$$

77. La règle de la multiplication conduit immédiatement à celle de la division et à celle de l'élévation aux puissances entières. La règle de la division est donnée par la formule

$$\frac{r_p}{r_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'},$$

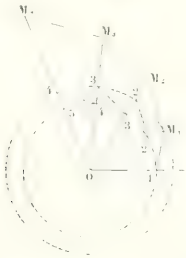
qui exprime qu'il faut faire le quotient des modules et la différence des arguments.

78. *Élévation aux puissances, extraction des racines.* — Pour l'élévation aux puissances entières, on a

$$(r_p)^m = r^m{}_{mp},$$

on élève le module à la puissance indiquée, et l'on multiplie l'argu-

Fig. 9.



ment par l'exposant de cette puissance. De là (*fig.* 9) une con-

struction très-simple des puissances successives de $OM_1 = r_p$ au moyen de deux circonférences concentriques, de rayons égaux à l'unité et à r. On forme les multiples de l'angle p, puis on mène des parallèles aux droites 22, 33, 44, ...

79. Si l'on a à multiplier entre elles deux quantités complexes, décomposées en leurs composantes rectangulaires [66],

$$x + iy \quad \text{et} \quad x' + iy',$$

on fera [75] cette multiplication d'après la règle de la multiplication des polynômes, en se rappelant [76] que le carré de i est -1. On a ainsi

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y),$$

le produit étant lui-même décomposé en ses composantes rectangulaires.

On déduit de là les moyens indiqués dans les Traités d'Algèbre, pour ramener à la forme $u + iv$ les produits, les quotients et les puissances entières des quantités complexes.

80. Dans le cas du module $= 1$, on a, d'après la règle générale,

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q}.$$

Si l'on met pour 1_p sa valeur [69], et de même pour les autres, il vient, en effectuant la multiplication,

$$\begin{aligned}
&(\cos p + i \sin p)(\cos q + i \sin q) \\
&= (\cos p \cos q - \sin p \sin q) + i(\cos p \sin q + \sin p \cos q) \\
&= \cos(p + q) + i \sin(p + q).
\end{aligned}$$

En égalant séparément les composantes réelles et les composantes imaginaires, on obtient les valeurs connues de $\cos(p + q)$ et de $\sin(p + q)$.

On a de même, pour m entier et positif,

$$(1_p)^m = (\cos p + i \sin p)^m = \cos mp + i \sin mp.$$

En développant le premier membre par la formule du binôme, on obtient $\cos mp$ et $\sin mp$ exprimés au moyen de $\cos p$ et de $\sin p$.

On trouve ensuite

$$\cos p = \frac{1_p + 1_{-p}}{2}, \quad i \sin p = \frac{1_p - 1_{-p}}{2},$$

d'où

$$2^m \cos^m p = (1_p + 1_{-p})^m = 1_{mp} + \frac{m}{1} 1_{(m-2)p} + \frac{m(m-1)}{1.2} 1_{(m-4)p} + \ldots$$
$$= 2\left[\cos mp + \frac{m}{1} \cos(m-2)p + \ldots\right],$$

où il faut distinguer les cas de m pair et de m impair. De même pour le développement de $(2i \sin p)^m$.

81. Considérons maintenant l'opération inverse de l'élévation aux puissances, l'extraction des racines. La racine $n^{\text{ième}}$ de r_p étant définie par l'égalité

$$(1) \qquad u^n = r_p,$$

on voit que la quantité complexe $\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}}$, qui a pour module la racine $n^{\text{ième}}$ du module et pour argument la $n^{\text{ième}}$ partie de l'argument de la quantité donnée, satisfera à cette égalité. On aura donc

$$\sqrt[n]{r_p} = \left(r_p^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}}.$$

Mais nous avons remarqué [56] que, étant donné un point du plan, correspondant au module r et à l'argument p, ce même point peut être considéré aussi comme ayant pour argument $p + 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque. Donc l'argument de $\sqrt[n]{r_p}$ ou de $\sqrt[n]{r_{p+2k\pi}}$ aura pour valeur un quelconque des angles compris dans la formule

$$(2) \qquad \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Or, si l'on donne à k, n valeurs consécutives, telles que

$$0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

on obtiendra des angles qui correspondront à toutes les directions distinctes, données par cette formule; donc $\sqrt[n]{r_{p+2k\pi}}$ aura n valeurs

distinctes, de même module $\sqrt[n]{r}$ et d'arguments différents. Les points qui représentent ces valeurs sont situés sur une même circonférence de rayon $\sqrt[n]{r}$, qu'ils partagent en n parties égales.

Ainsi, lorsqu'une quantité complexe est déterminée, comme cela a généralement lieu, au moyen de ses composantes rectangulaires, sous la forme $x + iy$, l'argument n'étant connu qu'à un multiple près de la circonférence, la racine $n^{\text{ième}}$ de cette quantité admettra toujours n valeurs distinctes, c'est-à-dire que l'équation binôme (1) aura toujours n racines inégales.

Il n'en serait plus de même dans le cas, moins ordinaire, où l'on donnerait la valeur même de l'argument p de la quantité complexe. Dans ce cas, $\frac{p}{n}$ serait la seule valeur admissible pour l'argument de la racine, et l'extraction des racines deviendrait alors une opération uniforme.

82. Si l'on élève $\sqrt[n]{r_p}$ à la puissance m, m étant premier avec n, on aura la puissance fractionnaire

$$r_p^{\frac{m}{n}},$$

dont le module sera $r^{\frac{m}{n}}$, et l'argument un quelconque des angles compris dans la formule

$$\frac{m}{n}p + \frac{m}{n} \cdot 2k\pi.$$

Ces angles correspondent, dans un autre ordre, aux mêmes directions que les angles (2) du numéro précédent, de sorte que la détermination des valeurs de $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ revient à la construction d'un polygone régulier étoilé, de même que celle des valeurs de $(r_p)^{\frac{1}{n}}$ revient à la construction d'un polygone régulier convexe.

83. Si l'on fait tendre $\frac{m}{n}$ vers un nombre incommensurable α, le module de $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ tendra vers la limite déterminée r^{α}; mais, le dénominateur n croissant indéfiniment, les sommets du polygone régulier de n côtés se rapprocheront de plus en plus, de sorte qu'il

y aura toujours deux sommets consécutifs qui tendront indéfiniment vers un point quelconque désigné d'avance sur la circonférence de rayon r^α. Donc une puissance incommensurable d'une quantité complexe $x + iy = r_p$, donnée seulement par la position d'un point sur le plan (comme cela arrive toutes les fois que r_p provient d'une addition), est indéterminée, et l'on ne peut faire usage de cette expression que dans le cas où l'on a besoin seulement de connaître entre quelles limites elle est renfermée, comme cela a lieu, par exemple, lorsque le module r est infiniment petit.

Il n'en serait plus de même si l'argument était complétement donné, et non plus seulement connu à un multiple de 2π près. Alors on aura, sans ambiguïté, quel que soit α,

[illegible]

§ IV.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

84. D'après ce que nous venons de voir, si l'on définit les opérations au point de vue des quantités complexes, une équation binôme de degré n, qui, au point de vue des quantités réelles, pouvait avoir seulement 0, 1 ou 2 racines, en aura maintenant toujours autant qu'il y a d'unités dans son degré.

Il en est de même pour une équation algébrique quelconque, c'est-à-dire qu'une équation algébrique du degré n, qui, au point de vue des quantités réelles, avait, *au maximum*, n racines, en aura *toujours* n, si l'on définit les opérations au point de vue des quantités complexes.

Pour démontrer ce théorème fondamental, il suffit, comme on sait, de démontrer que toute équation algébrique à coefficients réels ou complexes admet au moins une racine complexe de la forme r_p ou $x + iy$.

85. Soit

$$f(z) = Z = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

un polynôme entier et rationnel du degré n, dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des quantités quelconques, réelles ou complexes. Pour chaque valeur de la variable $z = r_p = x + iy$, on pourra construire les divers termes du polynôme; en les ajoutant, on formera un polygone généralement ouvert, et le côté R_p, qui fermera le polygone, sera la valeur du polynôme $f(z)$. Il s'agit de faire voir que, pour une valeur de z convenablement choisie, le polygone se ferme de lui-même, et que l'on a alors

$$R = 0 \quad \text{ou} \quad f(z) = 0.$$

Remarquons d'abord que, pour une valeur suffisamment grande du module r de z, on pourra toujours faire en sorte que le rapport du module du premier terme $a_0 z^n$ au module de la somme de tous les autres termes de $f(z)$ soit aussi grand que l'on voudra, et par conséquent que le rapport du module de $f(z)$ au module du premier terme diffère aussi peu que l'on voudra de l'unité; donc, si l'on donne à r une valeur suffisamment grande, le module de $a_0 z^n$ pouvant devenir aussi grand que l'on voudra, le module R de $f(z)$ pourra aussi surpasser toute grandeur donnée. Ainsi l'on pourra tracer autour de l'origine un cercle de rayon assez grand pour que la valeur de R correspondante à tous les points du plan en dehors de ce cercle soit plus grande que la valeur correspondante à un point quelconque donné d'avance dans l'intérieur de ce cercle.

86. Considérons maintenant un point quelconque $z = r_p$ du plan, et le point $Z = R_p$ qui représente la valeur de $f(z)$ correspondante à z. Donnons à z un accroissement infiniment petit $z_1 - z = \zeta = \rho_\zeta$, et voyons quelle sera la forme de l'accroissement qui en résultera pour Z.

Le terme $a_0 z^n$ devient

$$a_0 (z + \zeta)^n = a_0 (z^n + n z^{n-1} \zeta + k \zeta^2),$$

k désignant, abstraction faite de sa valeur particulière, toute quantité qui ne devient pas infinie pour $\zeta = 0$. L'accroissement de $a_0 z^n$ sera donc $a_0 z_1^n - a_0 z^n = n a_0 z^{n-1} \zeta + k \zeta^2$. En calculant de même les accroissements des autres termes, et faisant la somme, on obtiendra, pour l'accroissement de $f(z)$, une expression de la

forme

$$[na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}]\zeta + k\zeta^2 = f'(z)\zeta + k\zeta^2.$$

Supposons d'abord que, pour la valeur de z considérée, $f'(z)$ ne soit pas nul, et soit $f'(z) = R'_P$. La valeur de l'accroissement de $f(z)$ pourra s'écrire ainsi

$$Z_1 - Z = R'\rho_{P+\varphi} + k\rho^2{}_{2\varphi},$$

et cette expression, pour ρ infiniment petit, différera infiniment peu de son premier terme.

Cela posé, si l'on fait varier φ en laissant ρ constant, le point $z_1 = z + \zeta$ décrira autour du point z un cercle de rayon ρ. En même temps, le point qui représente les deux premiers termes $Z + R'\rho_{P+\varphi}$ de la valeur de $f(z+\zeta)$ décrira autour du point Z un cercle de rayon $R'\rho$, infiniment petit en même temps que ρ et faisant avec ρ_φ l'angle constant P′. Pour avoir la position de $Z_1 = f(z+\zeta)$ correspondante à chaque valeur de φ, on portera, à partir du point correspondant de ce cercle, une ligne $= k(\rho^2)_{2\varphi}$, de longueur infiniment petite par rapport au rayon du cercle. Or, lorsque φ croît de 2π, Z_1 reprend sa valeur primitive. Les points z_1 et $Z + (R'\rho)_{P+\varphi}$ décrivent chacun leur cercle entier; par conséquent le point Z_1, qui ne peut s'éloigner de $Z + (R'\rho)_{P+\varphi}$ que d'une quantité infiniment petite par rapport au diamètre du cercle, ne pourra revenir à sa position primitive qu'après avoir fait le tour complet du point Z. Il décrira donc autour de Z une courbe fermée, infiniment peu différente d'un cercle.

87. Si l'on calcule maintenant, pour chaque point du plan, la valeur du carré R^2 du module de la fonction $f(z)$, il y aura nécessairement, à l'intérieur du cercle dont nous parlions au n° 85, une valeur de R^2 inférieure à toutes les autres. Tant que cette valeur ne sera pas nulle, on pourra répéter, pour le point $Z = R_P$, le raisonnement du numéro précédent. En faisant décrire au point $z+\zeta$ un cercle infiniment petit autour de z, le point $Z_1 = f(z+\zeta)$ décrira autour de $f(z)$ une courbe fermée, infiniment peu différente d'un cercle, et par conséquent, dans sa révolution autour de R_P, le point $Z_1 = f(z+\zeta)$ rencontrera le rayon vecteur mené de l'origine au point R_P en un point situé entre zéro et R_P, et correspon-

dant, par conséquent, à un module de $f(z+\zeta)$ moindre que R. Donc aucun point R_p autre que l'origine ne peut correspondre à une valeur minimum de R, et, puisque cette valeur minimum existe et qu'elle ne peut être autre que zéro, il s'ensuit qu'il existe au moins une valeur de z pour laquelle la fonction $f(z)$ s'évanouit; donc l'équation $f(z)=0$ a au moins une racine.

88. Nous avons supposé, dans cette démonstration, que $f'(z)$ n'était pas nul pour le point considéré. Si l'on avait $f'(z)=0$, on pousserait le développement plus loin, et, en désignant par $f^{(m)}(z)$ la première des fonctions dérivées qui ne s'annule pas en ce point et par $R'_{p'}$ la valeur de

$$\frac{f^{(m)}(z)}{1.2\ldots m},$$

on aurait, comme précédemment,

$$Z_1 = Z + \frac{f^{(m)}(z)}{1.2\ldots m}\zeta^m + h\zeta^{m+1} = R'\rho^m + R'_{p'}\rho'^m + h\rho^{m+1} \cos m\theta,$$

expression dont le second terme est infiniment petit par rapport au premier. On verrait alors, comme précédemment, que, si $z+\zeta$ fait une fois le tour de z sur un cercle infiniment petit, $f(z+\zeta)$ décrira une courbe fermée faisant m fois le tour de $f(z)$, et s'écartant infiniment peu d'un cercle de rayon $R'\rho^m$, et l'on en tirerait les mêmes conclusions que dans le cas précédent.

Ce théorème étant démontré, on établira d'une manière générale toutes les propriétés connues des équations algébriques.

CHAPITRE III.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

§ I

DÉFINITION ET FORMATION DES DÉTERMINANTS.

89. Soit une suite d'éléments

$$a, b, c, d, \ldots$$

ou

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

représentés par des lettres différentes, rangées par ordre alphabétique, ou par une même lettre affectée d'indices rangés par ordre de grandeur croissante.

Si l'on assemble ces éléments en les plaçant dans un ordre quelconque, le groupe ainsi obtenu se nomme une *disposition*.

Étant donnée une disposition, si l'on y compare les éléments deux à deux de toutes les manières possibles, chaque couple, dans lequel les éléments seront rangés dans un ordre contraire à l'ordre alphabétique ou à l'ordre de grandeur croissante des indices, sera dit présenter un *dérangement*.

Ainsi la disposition

$$e\ a\ d\ c\ f\ b$$

présente huit dérangements

$$ea,\ ed,\ ec,\ eb,\ dc,\ db,\ cb,\ fb;$$

la disposition

$$a_3\, a_1\, a_4\, a_2$$

présente sept dérangements

$$51,\ 54,\ 53,\ 52,\ 43,\ 42,\ 32.$$

90. D'après la formule qui exprime le nombre des permutations que l'on peut faire subir à n éléments, le nombre des dispositions différentes de n éléments sera

$$1.2.3\ldots n.$$

Ces dispositions se partagent en deux classes : celles dans lesquelles le nombre des dérangements est *pair* et qui forment la classe *paire* ou *positive*, et celles dans lesquelles le nombre des dérangements est *impair* et qui forment la classe *impaire* ou *négative*.

91. Théorème. — *Une disposition change de classe lorsqu'on permute entre eux deux de ses éléments.*

En d'autres termes, deux dispositions qui peuvent se déduire l'une de l'autre par l'échange mutuel de deux éléments appartiennent à des classes différentes.

Première démonstration. — Soient g, h les deux éléments qu'il s'agit de permuter, et désignons par

$$\mathrm{A}g\mathrm{B}h\mathrm{C}$$

la disposition donnée, A représentant l'ensemble des éléments qui précèdent g, B l'ensemble des éléments placés entre g et h, et C l'ensemble des éléments qui suivent h. Par l'échange en question, cette disposition devient

$$\mathrm{A}h\mathrm{B}g\mathrm{C}.$$

Les nombres de dérangements résultant de la comparaison de g et de h avec les éléments de A et de C n'éprouvent évidemment aucune altération. On peut donc en faire abstraction, ainsi que des nombres de dérangements que présentent les groupes A, B, C considérés soit ensemble, soit séparément. Il reste donc à examiner uniquement la variation produite dans le nombre des dérangements par le passage de la disposition $g\mathrm{B}h$ à la disposition $h\mathrm{B}g$.

Soit μ le nombre total des éléments de B, et supposons que, parmi ces éléments, il y en ait α de rang plus élevé que g, et β de rang plus élevé que h. En ne tenant pas compte du nombre des

dérangements du groupe B, on voit que le groupe gB présentera $\gamma - \alpha$ dérangements, et que le groupe Bh en présentera β; donc l'ensemble gBh en présentera

$$\gamma - \alpha + \beta.$$

Considérons maintenant la disposition hBg, en faisant toujours abstraction des dérangements de B : elle contient d'abord *un* dérangement hg; ensuite hB en contient $\gamma - \beta$, et Bg en contient α; donc le nombre des dérangements de hBg est

$$1 + \gamma - \beta + \alpha.$$

La différence

$$= 2\alpha - 2\beta + 1$$

de ces deux nombres, laquelle représente la variation du nombre des dérangements, est essentiellement impaire; donc, si l'une des dispositions considérées appartient à la classe paire, l'autre appartiendra à la classe impaire.

Deuxième démonstration. — Soient a, b, c, ... les indices des éléments d'une certaine disposition. Formons le produit

$$P = (b - a)(c - a) \ldots (c - b) \ldots$$

des différences deux à deux de ces indices, prises en retranchant chacun d'eux de tous ceux qui viennent après lui dans cette disposition. A chaque dérangement correspondra une différence négative; donc P sera positif ou négatif, suivant que la disposition appartiendra à la classe paire ou à la classe impaire.

Cela posé, soient g, h les indices des deux éléments qu'il s'agit de permuter; le produit P, relatif à la disposition primitive, pourra se mettre sous la forme

$$P = \varepsilon \cdot \overbrace{(b-a)(c-a)\ldots}^{1} \overbrace{(g-a)(g-b)\ldots}^{2} \overbrace{(h-a)(h-b)\ldots}^{3} \overbrace{(h-g)}^{4} \ldots$$

ε désignant ± 1. Si l'on échange entre eux g et h, le groupe de facteurs (1) n'éprouvera aucun changement; les groupes (2) et (3) ne feront que s'échanger entre eux; seul, le facteur (4) changera de signe. P lui-même changera donc de signe, et par suite la disposition changera de classe.

Le signe du produit P, qui détermine la parité ou l'imparité de la classe d'une disposition, s'appelle, pour abréger, le *signe* de cette disposition : de là les noms de *classe positive* et de *classe négative* donnés à la classe *paire* et à la classe *impaire*.

92. Étant données deux dispositions quelconques des mêmes éléments, on pourra passer de l'une de ces dispositions à l'autre par une série d'échanges mutuels de deux éléments consécutifs.

Soient, par exemple, les deux dispositions

$$f \quad a \quad d \quad c \quad e \quad g \quad b,$$
$$c \quad a \quad g \quad f \quad d \quad b \quad e.$$

Pour passer de la première à la seconde, on fera d'abord arriver la lettre c à la première place, qu'elle doit finalement occuper, en l'échangeant successivement avec les lettres d, a, f qui la précèdent, ce qui donne la disposition

$$c \quad f \quad a \quad d \quad e \quad g \quad b.$$

On fait ensuite arriver la lettre a à la seconde place en l'échangeant avec f, ce qui donne

$$c \quad a \quad f \quad d \quad e \quad g \quad b.$$

On fait venir g au troisième rang en l'échangeant avec e, d, f, d'où la disposition

$$c \quad a \quad g \quad f \quad d \quad e \quad b.$$

La lettre f, se trouvant maintenant au rang qu'elle doit occuper, ne donnera lieu à aucun échange : il en est de même pour d. Enfin b arrivera au sixième rang par un échange avec e.

Il est aisé de voir que ce procédé est applicable à tous les cas.

On voit que cela revient à distribuer les éléments de la disposition donnée par groupes $fadc$, fa, $fdeg$, f, d, eb, et à faire subir successivement à chaque groupe une *permutation circulaire* [94], qui ramène le dernier élément au premier rang.

93. Remarquons que chaque échange de deux éléments change la classe de la disposition [91]. Or, si l'on fait le compte des nombres d'échanges qui ont eu lieu dans l'exemple précédent pour passer de

l'une des dispositions proposées à l'autre, on trouve

$$3 + 1 + 3 + 0 + 0 + 1 = 8,$$

donc le produit P, qui donne le signe de la classe, a été changé huit fois de signe, c'est-à-dire multiplié par

$$(-1)^8 = 1.$$

On en conclut que les deux dispositions en question appartiennent à la même classe.

En général, deux dispositions appartiennent à la même classe ou à des classes différentes, suivant que, pour passer de l'une à l'autre, on devra employer un nombre pair ou un nombre impair d'échanges des éléments deux à deux.

Ce nombre d'échanges peut varier suivant l'ordre dans lequel on procède; mais, de la relation qui existe entre ce nombre d'échanges et les classes auxquelles appartiennent les deux dispositions, il s'ensuit que ce nombre, tout en variant, conserve toujours la même parité.

94. Etant donnée une disposition de n éléments, si l'on place le premier élément au dernier rang (ou le dernier au premier rang), en conservant à tous les autres leurs situations relatives, on dit que la disposition a subi une *permutation circulaire*.

Il est clair que cette permutation peut s'obtenir au moyen de $n-1$ échanges mutuels de deux éléments consécutifs; donc une disposition change ou ne change pas de classe par l'effet d'une permutation circulaire de ses n éléments, suivant que $n-1$ sera impair ou pair, c'est-à-dire suivant que n sera pair ou impair. En d'autres termes, le signe de la classe sera multiplié par $(-1)^{n-1}$.

95. Parmi les $1.2.3\ldots n$ dispositions possibles de n éléments, soient μ le nombre de celles qui appartiennent à la classe paire, μ' le nombre de celles qui appartiennent à la classe impaire. Considérons deux quelconques g, h de ces éléments. Lorsqu'on échangera g et h entre eux, on ne pourra que reproduire des dispositions appartenant aux $\mu+\mu'$ dispositions primitives, et, de plus, on les reproduira toutes. En effet, les nouvelles dispositions seront en même nombre que les proposées; outre cela, elles seront différentes, non-seulement des dispositions primitives qui leur ont

donné naissance (puisque les éléments g et h s'y présentent dans l'ordre inverse), mais encore elles seront différentes entre elles; car, toutes les dispositions primitives, telles que $AgBhC$ ou $A'hB'gC'$, différant entre elles par la composition des groupes A, B, C ou A', B', C', les dispositions nouvelles $AhBgC$ ou $A'gB'hC'$, qui s'en déduisent, différeront aussi entre elles, par suite de la diversité des mêmes groupes.

Or, par l'échange des éléments g et h, chaque disposition change de classe, de sorte que les μ dispositions de la classe paire se changeront en μ dispositions de la classe impaire, et les μ' dispositions de la classe impaire en μ' dispositions de la classe paire; mais, comme on n'a fait que reproduire ainsi le même ensemble total de dispositions, il en résulte que le nombre des dispositions de la classe paire, par exemple, peut être représenté indifféremment par μ ou par μ'. Il faut donc que l'on ait

$$\mu = \mu',$$

c'est-à-dire que le nombre total des dispositions différentes se compose de nombres égaux de dispositions appartenant à chacune des deux classes, savoir de $\frac{1.2.3\ldots n}{2}$ dispositions de la classe paire et d'un égal nombre de dispositions de la classe impaire.

96. Ces principes posés, nous pouvons maintenant définir ce que c'est qu'un *déterminant*.

Considérons n lignes parallèles, composées chacune de n éléments, et affectons chaque élément d'une *lettre* ou d'un *indice supérieur*, qui marque le rang de cet élément dans sa ligne *horizontale*, et d'un *indice inférieur*, qui marque le rang de la ligne horizontale à laquelle l'élément appartient.

On peut encore dire, en partageant le tableau des éléments en *lignes verticales*, que l'indice *inférieur* marque le rang de l'élément dans sa ligne verticale, tandis que la *lettre* ou l'indice *supérieur* marque le rang de la ligne verticale à laquelle l'élément appartient.

Ainsi, en prenant n lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots \quad h,$$

on représentera le tableau des n^2 éléments, disposés en carré, par

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & h_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & h_n \end{array}$$

Ou encore, si l'on emploie, au lieu de lettres, des indices supérieurs, le tableau sera représenté par

$$\begin{array}{ccccc} a'_1 & a_1 & a''_1 & \ldots & a^{(n-1)}_1 \\ a'_2 & a_2 & a''_2 & \ldots & a^{(n-1)}_2 \\ a'_3 & a''_3 & a'''_3 & \ldots & a^{(n-1)}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & a'''_n & \ldots & a^{(n-1)}_n \end{array}.$$

Les éléments situés sur la ligne qui va du premier élément de la première ligne au dernier élément de la dernière ligne forment la *diagonale* du tableau. Pour chaque élément de la diagonale, les deux indices qui marquent les rangs des deux lignes, horizontale et verticale, auxquelles il appartient sont égaux entre eux.

Le produit des n éléments de la diagonale, pris avec son signe,

$$\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n$$

ou

$$\pm a'_1 a'_2 a''_3 \ldots a^{(n-1)}_n,$$

s'appelle le *terme principal*.

Ce terme ne présente *aucun dérangement*, soit que l'on considère l'ordre des lettres (ou des indices supérieurs), soit que l'on considère l'ordre des indices (inférieurs). Ainsi la disposition des lettres (ou des indices supérieurs) et celle des indices (inférieurs) appartiennent l'une et l'autre à la classe *paire* ou *positive*.

97. Laissons maintenant les lettres (ou les indices supérieurs) dans leur ordre naturel, et permutons les indices (inférieurs) de toutes les manières possibles. Nous obtiendrons ainsi

$$1.2.3\ldots n$$

produits, correspondants aux $1.2.3\ldots n$ dispositions différentes de ces indices. Si nous affectons chaque produit du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la disposition de ses indices appartient à la classe positive ou à la classe négative, la somme algébrique de tous ces produits est ce qu'on appelle le *déterminant* du système de n^2 éléments.

On représente un déterminant en écrivant le tableau carré de ses éléments entre deux traits verticaux, de cette manière :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & h_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & h_n \end{vmatrix}.$$

On se sert quelquefois de la notation plus abrégée

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n,$$

qui consiste à écrire le terme principal, qui sert à former tous les autres, en le faisant précéder du signe de sommation, et du double signe $\pm$, qui rappelle la manière dont on détermine le signe de chaque terme.

Plus simplement encore, on se contente d'écrire le terme principal, en le renfermant entre deux traits verticaux, de cette manière :

$$\left| a_1 b_2 c_3 \ldots h_n \right|.$$

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1.$$

98. Chaque terme d'un déterminant de n^2 éléments étant le produit de n facteurs, on dit que le déterminant est *du $n^{ième}$ ordre* ou *du $n^{ième}$ degré*.

99. Dans chaque terme, les lettres qui représentent les n fac-

teurs sont toutes différentes entre elles, et il en est de même des n indices, qui ne sont autre chose que les n premiers nombres, pris dans un ordre quelconque. Ainsi un terme quelconque contient un facteur, et un seul, appartenant à chaque ligne verticale, et il contient un facteur, et un seul, appartenant à chaque ligne horizontale.

100. Pour connaître le signe qui doit affecter chaque terme d'un déterminant, il suffit de considérer la disposition des indices et de compter combien cette disposition contient de dérangements. Suivant que ce nombre sera pair ou impair, le terme devra être affecté du signe $+$ ou du signe $-$.

Par exemple, dans le déterminant du troisième degré du n° **97**, les indices 2, 3, 1 du terme $a_2 b_3 c_1$ présentent deux dérangements, 21 et 31; le signe du terme sera donc celui de $(-1)^2$, c'est-à-dire le signe $+$.

101. Étant donné le déterminant de degré n ou de n^2 éléments, il est facile de former par son moyen le déterminant de degré $n+1$ ou de $(n+1)^2$ éléments. La lettre ε désignant ± 1, soit

$$T = \varepsilon . a_1 b_2 \ldots z_n$$

un terme quelconque du déterminant de degré n; si l'on écrit à la suite de ce terme un nouvel élément h_{n+1}, le nombre des dérangements dans la disposition des indices ne sera pas altéré, et, par conséquent, le nouveau terme

$$T' = \varepsilon' . a_{1_1} b_{1_1} \ldots g_{n_1} h_{n_1}$$

appartiendra à la même classe que T et devra être affecté du même signe, de sorte qu'on aura

$$\varepsilon' = \varepsilon.$$

Si l'on fait maintenant passer l'indice $n+1$ du dernier rang au premier par une succession d'échanges mutuels de deux indices consécutifs, la classe de la disposition changeant à chaque fois, il faudra changer à chaque fois le signe. On obtiendra ainsi $n+1$ termes du déterminant de degré $n+1$, avec leurs signes. En faisant la même chose pour tous les $1.2.3\ldots n$ termes du développement donné, on formera évidemment tous les $1.2.3\ldots n(n+1)$ termes du déterminant de degré $n+1$.

102. Si, dans un terme

$$T = \varepsilon . a_{i_1} b_{i_2} \ldots g_{i_n}$$

d'un déterminant de degré n, on transpose deux facteurs quelconques, tels que b_{i_2}, d_{i_4}, le nombre des dérangements des indices varie d'un nombre *impair* [91], et il en est de même du nombre des dérangements de l'ordre des lettres. Donc, si l'on échange entre eux deux facteurs, chacun d'eux conservant sa lettre et son indice, ce qui n'altère pas la valeur du terme, le nombre total des dérangements, tant de l'ordre des lettres que de celui des indices, aura varié d'un nombre pair par cette transposition. Donc ce nombre total, par sa parité ou son imparité, décidera de la classe du terme, comme le faisait primitivement le nombre des dérangements des seuls indices lorsque l'ordre alphabétique des lettres n'avait pas été altéré.

Or on peut, par des transpositions de deux facteurs, arriver à disposer, dans chaque terme, les indices par ordre de grandeur. Le nombre total des dérangements se réduira alors au nombre des dérangements des lettres, et ce sera la parité ou l'imparité de ce dernier nombre qui déterminera le signe du terme. Il résulte de là que l'on obtiendra le même déterminant si, en partant du même terme principal, on laisse invariable l'ordre des indices, en permutant les lettres de toutes les manières possibles, et fixant le signe de chaque terme d'après le nombre des dérangements qu'y présente l'ordre des lettres.

Le passage de l'un de ces modes de formation à l'autre revient à l'échange des lignes horizontales en lignes verticales de *mêmes rangs,* et *vice versa*. Donc on n'altère pas un déterminant lorsqu'on y change chaque ligne horizontale en une ligne verticale de même rang, et réciproquement.

On a ainsi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & a'''_1 \\ a'_2 & a''_2 & a'''_2 \\ a'_3 & a''_3 & a'''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 \end{vmatrix}.$$

C'est pour cela que ces déterminants sont représentés sans ambiguïté par les notations abrégées $|a\ b'|$, $|a'_1\ a''_2\ a'''_3|$.

§ II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DÉTERMINANTS.

103. Si, dans un déterminant

$$(1)\qquad \begin{matrix} a & b & \ldots & h \\ a & b & \ldots & h \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a & b & \ldots & h \end{matrix},$$

on échange entre elles deux lignes parallèles (deux lignes horizontales par exemple), cela revient à échanger entre eux, dans chaque terme de ce déterminant, les indices qui répondent à ces deux lignes. On obtient ainsi un nouveau polynôme, que nous désignerons par $(1)'$.

Soient i, k les deux indices que l'on veut échanger entre eux. Le terme

$$\varepsilon . a_i b_j c_k \ldots$$

du déterminant (1) produira dans $(1)'$ le terme

$$\varepsilon . a_k b_j c_i \ldots$$

Ce dernier terme, abstraction faite du signe, fait partie des termes du déterminant (1), puisque ces termes renferment toutes les dispositions possibles des indices $1, 2, \ldots, n$. Seulement les deux dispositions $ijk\ldots$ et $kji\ldots$ appartiennent [91] à des classes différentes; de sorte que, le terme correspondant à la première étant affecté dans (1) du signe de ε, le terme correspondant à la seconde y sera affecté du signe de $-\varepsilon$ et, par conséquent, du signe contraire à celui qu'il aura dans $(1)'$. Donc tous les termes de $(1)'$ sont égaux et de signes contraires aux termes de (1), et, par suite, le polynôme $(1)'$ est égal et de signe contraire au déterminant (1). On a donc ce théorème fondamental :

Un déterminant change de signe, sans changer de valeur numérique, lorsqu'on y échange entre elles deux lignes parallèles, ou, en d'autres termes, *lorsqu'on y fait l'échange mutuel de deux lettres* (*ou de deux indices supérieurs*) *ou de deux indices* (*inférieurs*).

On a de cette manière

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} b' & a' \\ b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ a' & c' & b' \\ a'' & c'' & b'' \end{vmatrix}.$$

104. Chaque échange mutuel de deux lignes parallèles, soit horizontales, soit verticales, équivaut donc à une multiplication du déterminant par -1; par conséquent, si l'on fait p échanges de deux lignes verticales et q échanges de deux lignes horizontales, le déterminant sera multiplié par

$$-1^{p+q}.$$

105. Une permutation circulaire de p indices, étant équivalente à $p-1$ échanges d'indices deux à deux (94), aura pour effet de multiplier le déterminant par

$$-1^{p-1}.$$

Si donc on permute circulairement tous les n indices du déterminant, celui-ci changera ou ne changera pas de signe, suivant que son degré n sera pair ou impair.

106. Soit un élément $a_q^{(p)}$, appartenant à la $p^{\text{ième}}$ ligne verticale et à la $q^{\text{ième}}$ ligne horizontale. On peut, par une permutation circulaire des p premiers indices supérieurs, faire passer au premier rang la $p^{\text{ième}}$ ligne verticale, ce qui amène l'élément considéré dans la première ligne verticale, en multipliant le déterminant par

$$-1^{p-1}.$$

On peut ensuite faire passer au premier rang la $q^{\text{ième}}$ ligne horizontale, ce qui amène l'élément en question à être le premier de la première ligne horizontale, ou, comme nous dirons pour abréger, le *premier élément du déterminant*; et cette nouvelle transposition aura pour effet de multiplier le déterminant par

$$(-1)^{q-1}.$$

On peut donc, en définitive, faire d'un élément quelconque $a_q^{(p)}$ le premier élément du déterminant, en transportant au premier rang chacune des deux lignes qui se croisent suivant $a_q^{(p)}$, pourvu que l'on multiplie le déterminant par

$$-1 \quad \ldots \quad -1 \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots.$$

Si $p = q$, c'est-à-dire si l'élément appartient à la diagonale, on pourra ainsi le faire passer au premier rang de cette diagonale, sans changer le signe du déterminant.

On a de cette manière

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a'_2 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a'_3 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a'_4 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & a'_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a'_2 & a'_2 & a_2 \\ a''_1 & a'_1 & a''_1 & a''_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a' & a' & c' \\ b' & a & c \\ b'' & a & c'' \end{vmatrix}.$$

107. Soient

$$(1) \qquad i, j, k, \ldots$$

et

$$(2) \qquad p, q, r, \ldots$$

deux dispositions quelconques des indices

$$1, 2, 3, \ldots.$$

et soient ε, ε' les signes respectifs des classes de ces dispositions. Si, dans le déterminant

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & a''_1 & \ldots \\ a'_2 & a_2 & a''_2 & \ldots \\ a'_3 & a'_3 & a''_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

on fait prendre aux indices supérieurs la disposition (1), le déterminant sera multiplié par ε; si l'on fait prendre ensuite aux indices

inférieurs la disposition (2), le déterminant sera encore multiplié par ε'; donc le déterminant (3) est égal à

$$(4) \qquad \varepsilon\varepsilon' \begin{vmatrix} a_p^i & a_p^j & a_p^k & \dots \\ a_q^i & a_q^j & a_q^k & \dots \\ a_r^i & a_r^j & a_r^k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

On aurait encore multiplié le déterminant (3) par $\varepsilon\varepsilon'$, si l'on avait donné d'abord la disposition (1) aux indices inférieurs, puis la disposition (2) aux indices supérieurs, de sorte que le déterminant (3) peut être encore mis sous la forme suivante, après avoir changé les lignes verticales en lignes horizontales, et *vice versa* [102] :

$$(5) \qquad \varepsilon\varepsilon' \begin{vmatrix} a_i^p & a_j^p & a_k^p & \dots \\ a_i^q & a_j^q & a_k^q & \dots \\ a_i^r & a_j^r & a_k^r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Donc les deux déterminants (4) et (5), qui se déduisent l'un de l'autre, en échangeant entre eux les deux indices de chaque élément, sont égaux et de même signe.

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_2''' & a_2' & a_2'' \\ a_1''' & a_1' & a_1'' \\ a_3''' & a_3' & a_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3'' & a_1'' & a_2'' \\ a_3' & a_1' & a_2' \\ a_3''' & a_1''' & a_2''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & b_2 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & a_2 \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

108. Si, dans un déterminant, deux lignes parallèles sont *égales entre elles,* c'est-à-dire si leurs éléments de même rang sont égaux chacun à chacun, le déterminant ne sera évidemment pas altéré par l'échange mutuel de ces deux lignes; mais, d'un autre côté, cet échange revient [103] à changer de signe tous les termes du déterminant, qui passe de la valeur R à la valeur — R. On doit donc avoir

$$R = -R,$$

et par conséquent

$$R = 0.$$

Donc *un déterminant s'évanouit quand deux de ses lignes pa-*

rallèles entre elles deviennent égales, ou, comme on dit encore, *quand deux de ses indices deviennent égaux entre eux*.

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

199. Supposons que, dans un déterminant

$$\begin{vmatrix} a'_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a'_2 & a''_2 & a'''_2 & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & a'''_n & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

tous les éléments de la première ligne horizontale soient nuls, à l'exception du premier a'_1. Chaque terme du déterminant devant contenir en facteur un élément de cette première ligne horizontale [99], les seuls termes qui ne s'évanouiront pas sont ceux qui contiendront en facteur le premier élément a'_1, en sorte que a'_1 entrera comme facteur commun dans tous les termes restants du déterminant. Le déterminant ne contiendra donc plus alors aucun autre élément appartenant à la première ligne verticale, et sa valeur sera ainsi indépendante des valeurs des éléments

$$a'_2, \quad a'_3, \quad \ldots, \quad a'_n,$$

que l'on pourra remplacer par des quantités arbitraires.

D'un autre côté, l'ensemble des termes multipliés par a'_1 se compose des produits $n-1$ à $n-1$ des éléments

$$\begin{matrix} a''_2, & a'''_2, & \ldots & a_2, \\ a''_3, & a'''_3, & \ldots & a_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_n, & a'''_n, & \ldots & a_n, \end{matrix}$$

et ces produits sont formés au moyen du terme principal

$$a''_2 a'''_3 \ldots a_n,$$

dans lequel les indices inférieurs seront permutés de toutes les ma-

nières possibles, et que l'on affectera du signe + ou du signe —, suivant que la disposition de ces indices sera ou non de même classe que la disposition

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

ou, ce qui revient au même (l'indice 1 conservant invariablement sa place dans le déterminant proposé), que la disposition

$$2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

donc cet ensemble n'est autre chose que le déterminant du degré $n-1$

$$\begin{vmatrix} a''_2 & a'''_2 & \ldots & a^{n}_2 \\ a''_3 & a'''_3 & \ldots & a^{n}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_n & a'''_n & \ldots & a^{n}_n \end{vmatrix}.$$

Ainsi le déterminant proposé est égal au produit de l'élément a'_1 par un déterminant du degré $n-1$, dont les éléments s'obtiennent en supprimant, dans le déterminant proposé, les deux lignes, horizontale et verticale, qui se croisent suivant l'élément a'_1.

110. En supposant $a'_1 = 1$, on en conclura que les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a'_2 & a''_2 & a'''_2 & \ldots & a^{n}_2 \\ a'_3 & a''_3 & a'''_3 & \ldots & a^{n}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & a'''_n & \ldots & a^{n}_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a''_2 & a'''_2 & \ldots & a^{n}_2 \\ a''_3 & a'''_3 & \ldots & a^{n}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_n & a'''_n & \ldots & a^{n}_n \end{vmatrix}$$

sont identiquement égaux, quels que soient les éléments

$$a'_2,\ a'_3,\ \ldots,\ a'_n.$$

111. Si les éléments $a'''_2, a^{\text{IV}}_2, \ldots, a^{(n)}_2$ étaient aussi tous nuls, on pourrait, en appliquant le même théorème, supprimer encore les deux lignes qui se croisent suivant l'élément a''_2, en mettant cet

élément en fact un commun. On a donc

$$\begin{vmatrix} a'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a'_3 & a'_3 & a'_3 & \dots & a'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n & a'_n & a'_n & \dots & a'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_1 \\ a'_2 & \dots & a'_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_n & \dots & a'_n \end{vmatrix}$$

quels que soient les éléments

$$a'_2, a'_3, a_4, \dots, a'_n,$$
$$a_3, a'_4, \dots, a'_n.$$

Si $a'_1 = a_2 = 1$, les deux déterminants ci-dessus seront égaux entre eux.

En continuant ainsi, on arrivera à cette conséquence, que, si tous les éléments d'un déterminant situés d'un même côté de la diagonale sont nuls, le déterminant se réduira à son terme principal, c'est-à-dire qu'on aura

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_2 & a''_2 & 0 & \dots & 0 \\ a'_3 & a'_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n & a'_n & a'_n & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

112. Si l'élément qui est seul différent de zéro dans une ligne dont tous les autres éléments sont nuls n'est pas le premier élément a'_1 du déterminant, on pourra le ramener au premier rang par la transposition des deux lignes qui le contiennent, en choisissant son signe en conséquence. On aura ainsi [106]

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_{i-1} & 0 & a'_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_i & \dots & a'_{i-1} & a'_i & a'_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a'_i & a'_1 & \dots \\ 0 & a'_1 & a'_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} a'_i \begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_{i-1} & a'_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i-1} & \dots & a'_{i-1} & a'_{i+1} & \dots \\ a'_{i+1} & \dots & a'_{i+1} & a'_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

valeur indépendante de

$$a'_1, \ldots, a'_{k-1}, a'_{k+1}, \ldots, a'_n;$$

donc le déterminant proposé se réduit au produit de $(-1)^{k-1}a'_k$ par le déterminant du degré $n-1$, formé en supprimant les deux lignes du déterminant proposé qui se croisent suivant a'_k.

113. On en conclut réciproquement que tout déterminant peut se transformer en un déterminant d'un degré plus élevé, contenant des éléments arbitraires. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & 1 & 0 \\ a''' & b''' & c''' & 1 \end{vmatrix} = \ldots,$$

les nouveaux éléments introduits a'', b'', a''', b''', c''', ... étant complétement arbitraires.

114. D'après ce que nous avons remarqué [99], chaque terme du déterminant

$$R = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \ldots & a_1 \\ a'_2 & a''_2 & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

contient en facteur un des éléments

$$a', a'', \ldots, a^{(n)}$$

de la $k^{\text{ième}}$ ligne horizontale, et n'en contient qu'un. Si l'on désigne par $A_k^{(i)}$ le multiplicateur de $a_k^{(i)}$ dans la valeur de R, $A_k^{(i)}$ sera un polynôme du degré $n-1$, dans les termes duquel il n'entrera aucun élément portant l'indice supérieur i ou l'indice inférieur k. D'après cette notation, le déterminant R pourra s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad R = A'_k a'_k + A''_k a''_k + \ldots + A^{(n)}_k a^{(n)}_k,$$

k étant un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$.

De même, si l'on met en évidence les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale, on pourra écrire, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$[illegible] \quad R = A_1^i a_1^i + A_2^i a_2^i + \ldots + A_n^i a_n^i.$$

112. Les formules [illegible] ne contiennent que R et [illegible] A_k^i, si l'on suppose $a_k^i = 1$. Les [illegible] A_k^i [illegible] l'une ou l'autre des deux lignes qui se coupent suivant a_k^i égaux à zéro. On aura donc

$$A_k^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1}^1 & \ldots & a_{k-1}^{i-1} & a_{k-1}^{i+1} & a_{k-1}^{n} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{k+1}^1 & \ldots & a_{k+1}^{i-1} & a_{k+1}^{i+1} & a_{k+1}^{n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

ou, d'après ce qui a été démontré [112],

$$A_k^i = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1}^1 & \ldots & a_{k-1}^{i-1} & a_{k-1}^{i+1} & \ldots \\ a_{k+1}^1 & \ldots & a_{k+1}^{i-1} & a_{k+1}^{i+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Donc les coefficients A_k^i sont eux-mêmes des déterminants du degré $n-1$, que l'on désigne sous le nom de *déterminants mineurs* ou de *déterminants partiels* du déterminant proposé R.

De plus, le coefficient $A_k^{(i)}$ de $a_k^{(i)}$ se forme en supprimant les deux lignes de R qui se croisent suivant l'élément $a_k^{(i)}$, et prenant le résultat avec le signe de $(-1)^{i+k}$.

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} a' + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} a''$$

$$= \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} c.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} b & c & d \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} a'$$

$$+ \begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} a'' - \begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix} a'''.$$

116. Si l'on considère tous les éléments de R comme des variables indépendantes, $A_k^{(i)}$ sera la dérivée partielle de R par rapport à l'élément a_k^i, et l'on aura ainsi

$$A_k^i = D_{a_k^i} R.$$

117. Si nous supposons que la ligne

$$a_i', \quad a_i'', \quad \ldots, \quad a_i^n$$

devienne égale à la ligne

$$a_l', \quad a_l'', \quad \ldots, \quad a_l^n,$$

le déterminant s'évanouit [108]. On a donc identiquement, quel que soit l'indice l, pris parmi les nombres 1, 2, ..., n, et différent de l,

$$(3) \qquad 0 = A_1^i a_l' + A_2^i a_l'' + \ldots + A_n^i a_l^n.$$

On a de même, pour j quelconque, différent de i,

$$(4) \qquad 0 = A_1^j a_1 + A_2^j a_2 + \ldots + A_n^j a_n.$$

118. De la forme (1) ou (2), sous laquelle on peut écrire un déterminant [114], en l'ordonnant suivant les éléments d'une même ligne quelconque, horizontale ou verticale, découlent des conséquences importantes.

I. Si chacun des éléments d'une même ligne est composé de deux parties, le déterminant se décompose dans la somme de deux autres.

On a, en effet,

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & \alpha_1 + \beta_1 \\ a'_2 & \ldots & \alpha_2 + \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} \ldots = A_1(\alpha_1 + \beta_1) + A_2(\alpha_2 + \beta_2) \ldots$$

$$= A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + \ldots$$

$$= \begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & \alpha_1 & \ldots \\ a'_2 & \ldots & \alpha_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & \beta_1 & \ldots \\ a'_2 & \ldots & \beta_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

119. Si plusieurs lignes d'un déterminant sont formées d'éléments polynômes, on ramènera, par des développements successifs, le déterminant proposé à être la somme de plusieurs déterminants à éléments monômes. Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} a + b & a' + b' \\ a_1 + b_1 & a'_1 + b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' + b' \\ a_1 & a'_1 + b'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a' + b' \\ b_1 & a'_1 + b'_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' \\ a_1 & a'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ a_1 & b'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a' \\ b_1 & a'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b' \\ b_1 & b'_1 \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que les termes principaux des différents déterminants, dans lesquels se décompose le déterminant proposé, sont les divers termes du développement du produit des polynômes qui sont situés sur la diagonale du déterminant proposé.

120. Si, dans le calcul du numéro précédent, on suppose la ligne

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

égale à une autre ligne

$$a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots, a_n^{(p)}$$

du déterminant proposé, le second déterminant, qui devient

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & a_1^{(p)} & \ldots \\ a'_2 & \ldots & a_2^{(p)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

s'évanouira identiquement, et il ne restera que le premier déter-

minant

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_1 & \dots \\ a'_2 & \dots & a'^{(2)}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

On conclut de là que *l'on n'altère pas un déterminant en ajoutant à une de ses lignes une ou plusieurs des autres lignes qui lui sont parallèles.*

121. II. Si l'on multiplie une ligne quelconque

$$a'_k, \quad a''_k, \quad \dots, \quad a_k$$

du déterminant

$$R = A'_k a'_k + A''_k a''_k + \dots + A^{(n)}_k a^{(n)}_k$$

par un facteur commun p, le déterminant devient

$$A'_k . pa'_k + A''_k . pa''_k + \dots + A^{(n)}_k . pa^{(n)}_k = pR.$$

Donc un déterminant est multiplié par un facteur donné p, lorsqu'on multiplie par ce facteur une ligne quelconque, horizontale ou verticale, du déterminant.

On peut donc, sans changer un déterminant, supprimer un facteur commun à tous les éléments d'une quelconque de ses lignes, pourvu qu'on mette ce facteur en multiplicateur commun devant tout le déterminant. Ainsi

$$\begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa' & b' & c' \\ pa'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

De même, on peut multiplier une quelconque des lignes par un facteur commun, pourvu qu'on divise le déterminant par ce facteur. Ainsi

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 9 \\ -2 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -6 & 14 & 18 \\ -2 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En particulier, si l'on change le signe de tous les éléments d'une ligne, ce qui revient à les multiplier par -1, le déterminant change de signe.

Si tous les éléments d'une ligne s'annulent, le déterminant s'annule, ce qui résulte d'ailleurs du n° 99.

122. Si, dans un déterminant, deux lignes parallèles sont *proportionnelles*, c'est-à-dire composées d'éléments respectivement proportionnels, on pourra rendre ces deux lignes égales, en divisant l'une d'elles par le rapport de ses éléments à ceux de l'autre, ce qui revient à diviser le déterminant par ce rapport. Mais, les deux lignes devenant égales, le déterminant s'évanouit; donc un déterminant est nul, lorsque deux de ses lignes parallèles sont proportionnelles.

Par exemple, si l'on suppose

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

on aura

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

III.

EXEMPLES DIVERS DE L'APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

123. Nous désignerons, pour abréger, par $L^{(i)}$ la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale d'un déterminant, et par L_k la $k^{\text{ième}}$ ligne horizontale.

I. Soit proposé de transformer le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y^2 \\ 1 & z & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

En multipliant L_2 et L'' par x, L_3 et L''' par y, L_4 et L^{IV} par z, il vient

$$R = \frac{1}{yz} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & yz & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix}$$

Divisons maintenant L_2, L_3 et L_4 chacune par xyz, puis multiplions L' par xyz. On aura

$$R = \frac{(xyz)^2}{(xyz)^3}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ \frac{1}{yz} & 0 & z & y \\ \frac{1}{xz} & z & 0 & x \\ \frac{1}{xy} & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

124. Actuellement ajoutons les trois dernières lignes horizontales à la première [120], et mettons en facteur $x+y+z$, qui multiplie alors tous les termes de la première ligne; il vient

$$R = (x+y+z) \times \text{un polynôme entier.}$$

Donc le polynôme R est divisible par $x+y+z$. De même, en ajoutant tour à tour à L_1 les sommes

$$+L_2 - L_3 - L_4, \quad -L_2 + L_3 - L_4, \quad -L_2 - L_3 + L_4,$$

on trouvera que R est aussi divisible par les trois facteurs

$$-x+y+z, \quad x-y+z, \quad x+y-z.$$

Le produit des quatre facteurs étant, comme R, du quatrième degré, on en conclut que R est de la forme

$$A(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$

A étant une constante. Pour déterminer cette constante, il suffit de comparer deux termes semblables des deux expressions, les termes en x^4 par exemple. Le terme en x^4 correspond, dans R, au produit $a''_1 a'_2 a''_3 a''_4$, dans lequel la disposition 2143 des indices présente deux dérangements, et qui, par suite, a le signe $+$. Dans l'autre polynôme, ce terme est $-Ax^4$. Donc $A = -1$, et par suite

$$R = -(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

On voit que $-R$ représente seize fois le carré de la surface d'un triangle ayant pour côtés x, y, z.

125. II. On verrait de même que le déterminant

$$\begin{vmatrix} t & x & y & z \\ x & t & z & y \\ y & z & t & x \\ z & y & x & t \end{vmatrix}$$

est égal au produit

$$(t+x+y+z)(t+x-y-z)(t-x+y-z)(t-x-y+z),$$

et représente ainsi, à un facteur constant près, l'aire d'un quadrilatère inscriptible au cercle et ayant pour côtés $-t, x, y, z$.

126. III. Si l'on égale à zéro le déterminant

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

qui est un polynôme du premier degré en x, y, on aura l'équation d'une ligne droite dont x, y seront les coordonnées rectangulaires. Le déterminant s'annulant lorsqu'on pose à la fois $x = x_1, y = y_1$, ou bien $x = x_2, y = y_2$, l'équation $\Delta = 0$ représentera la droite qui passe par les deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Les coefficients de x et de y dans Δ étant

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_1 - y_2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

la distance d'un point quelconque $M(x, y)$ du plan à la droite $\Delta = 0$ aura pour expression

$$p = \frac{\Delta}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \frac{\Delta}{M_1M_2}.$$

Or $p \times M_1M_2$ représente le double de la surface du triangle MM_1M_2; donc le déterminant Δ exprime le double de la surface du triangle qui a pour sommets les trois points (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Si l'on transporte l'origine des coordonnées en un point quelconque (a, b) du plan, cela revient à retrancher de L'' et de L''', dans l'expression de Δ, les produits $L' \times a$ et $L' \times b$. On a ainsi

cette autre expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}.$$

En retranchant, dans l'expression (11), L_1 de L_2 et de L_3, il vient [22]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x_1-x & y_1-y \\ 0 & x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y \\ x_2-x & y_2-y \end{vmatrix},$$

autre expression du double de la surface du triangle.

127. IV. En égalant à zéro le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

on aura de même l'équation du plan dont x, y, z sont les coordonnées rectangulaires variables et qui passe par les trois points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Les coefficients de x, y, z dans ce déterminant, savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

représentent [126], au signe près, les doubles des surfaces des projections du triangle $M_1M_2M_3$ sur les plans coordonnés; donc la racine carrée de la somme des carrés de ces trois déterminants exprimera le double de la surface de ce triangle $M_1M_2M_3$.

Il en résulte que la distance d'un point quelconque de l'espace $M(x, y, z)$ au plan $\Delta = 0$ a pour expression

$$p = \frac{\Delta}{2M_1M_2M_3}.$$

Or $p \times 2M_1M_2M_3$ est le sextuple du volume du tétraèdre $MM_1M_2M_3$; donc le déterminant Δ exprime le sextuple du volume

du tétraèdre qui a pour sommets les points x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4.

On verrait, comme dans le numéro précédent, que le déterminant Δ peut encore se mettre sous les deux formes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & [illegible] \\ 1 & x & [illegible] \\ 1 & x & [illegible] \\ 1 & x & [illegible] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [illegible] \end{vmatrix}$$

a, b, c étant quelconques.

128. V. Pour calculer la valeur numérique d'un déterminant dont les éléments sont donnés, le moyen le plus commode consiste à ramener ce déterminant à un déterminant de degré moindre d'une unité, que l'on traitera à son tour de la même manière, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un déterminant du second degré, que l'on évaluera directement.

Soit, par exemple, le déterminant du quatrième degré

$$R = \begin{vmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] & a^{\text{IV}} \end{vmatrix}$$

On ajoutera aux lignes L'', L''', L^{IV} respectivement les produits de L' par $-\frac{[illegible]}{[illegible]}$, $-\frac{[illegible]}{[illegible]}$, $-\frac{[illegible]}{[illegible]}$, ce qui fera disparaître dans les termes de L_1, à l'exception du premier. Le déterminant prendra alors la forme

$$R = \begin{vmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^2} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

en posant, pour abréger,

$$a'_k a'_1 - a'_1 a'_k = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_1 \\ a'_k & a'_k \end{vmatrix} = b'_k.$$

En traitant de même le déterminant

$$R' = \begin{vmatrix} b''_2 & b'''_2 & b^{\text{IV}}_2 \\ b''_3 & b'''_3 & b^{\text{IV}}_3 \\ b''_4 & b'''_4 & b^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix},$$

on le ramènera à la forme

$$\frac{1}{b''_2} \begin{vmatrix} c'''_3 & c^{\text{IV}}_3 \\ c'''_4 & c^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix},$$

où $c'_k = \begin{vmatrix} b''_2 & b'_2 \\ b''_k & b'_k \end{vmatrix}$, et cette dernière expression se calculera directement.

Si l'on donne, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix},$$

on commencera par calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 6 & 28 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 6 & 33 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 10 & 40 \end{vmatrix} = 10, \ldots,$$

et l'on trouvera successivement, pour la valeur du déterminant donné,

$$\frac{1}{3^2} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -10 & -8 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -26 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Si les nombres $a'_1, a''_1, \ldots$ sont exprimés approximativement en décimales, il sera avantageux de disposer les formules de manière à les rendre propres au calcul logarithmique à l'aide des logarithmes

d'addition et de soustraction. On opérera comme il suit :

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & a'''_1 & a^{\text{IV}}_1 \\ a'_2 & a''_2 & a'''_2 & a^{\text{IV}}_2 \\ a'_3 & a''_3 & a'''_3 & a^{\text{IV}}_3 \\ a'_4 & a''_4 & a'''_4 & a^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix} = a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 \begin{vmatrix} 1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & \alpha^{\text{IV}}_1 \\ 1 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & \alpha^{\text{IV}}_2 \\ 1 & \alpha'_3 & \alpha''_3 & \alpha^{\text{IV}}_3 \\ 1 & \alpha'_4 & \alpha''_4 & \alpha^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 1 & \alpha'_1 & \alpha'_1 & \alpha'_1 \\ 0 & \alpha'_2 - \alpha'_1 & \alpha''_2 - \alpha''_1 & \alpha^{\text{IV}}_2 - \alpha^{\text{IV}}_1 \\ 0 & \alpha'_3 - \alpha'_1 & \alpha''_3 - \alpha''_1 & \alpha^{\text{IV}}_3 - \alpha^{\text{IV}}_1 \\ 0 & \alpha'_4 - \alpha'_1 & \alpha''_4 - \alpha''_1 & \alpha^{\text{IV}}_4 - \alpha^{\text{IV}}_1 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \beta'_2 & \beta''_2 & \beta^{\text{IV}}_2 \\ \beta'_3 & \beta''_3 & \beta^{\text{IV}}_3 \\ \beta'_4 & \beta''_4 & \beta^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix}$$

$$= A\beta'_2\beta''_3\beta^{\text{IV}}_4 \begin{vmatrix} 1 & \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_2 \\ 1 & \gamma'_3 & \gamma^{\text{IV}}_3 \\ 1 & \gamma'_4 & \gamma^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} 1 & \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_2 \\ 0 & \gamma'_3 - \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_3 - \gamma^{\text{IV}}_2 \\ 0 & \gamma'_4 - \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_4 - \gamma^{\text{IV}}_2 \end{vmatrix}$$

$$= B \begin{vmatrix} \gamma'_3 - \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_3 - \gamma^{\text{IV}}_2 \\ \gamma'_4 - \gamma'_2 & \gamma^{\text{IV}}_4 - \gamma^{\text{IV}}_2 \end{vmatrix} = B\gamma'_3\gamma^{\text{IV}}_4 \begin{vmatrix} 1 & \gamma^{\text{IV}}_2 \\ 1 & \gamma^{\text{IV}}_3 \end{vmatrix} = C(\gamma^{\text{IV}}_3 - \gamma^{\text{IV}}_2).$$

129. VI. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

peut se mettre sous les diverses formes

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 - as_0 & s_2 - as_1 - bs_0 \\ s_1 & s_2 - as_1 & s_3 - as_2 - bs_1 \\ s_2 & s_3 - as_2 & s_4 - as_3 - bs_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1 - as_0 & s_2 - as_1 - bs_0 \\ 0 & s_1 & s_2 - as_1 & s_3 - as_2 - bs_1 \\ 0 & s_2 & s_3 - as_2 & s_4 - as_3 - bs_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1 - as_0 & s_2 - as_1 - bs_0 \\ 0 & s_1 - as_0 & s_2 - as_1 - bs_0 & s_3 - as_2 - bs_1 - cs_0 \\ 0 & s_2 - as_1 & s_3 - as_2 - bs_1 & s_4 - as_3 - bs_2 - cs_1 \end{vmatrix}$$

Or, si s_m est la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équa-

tion du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

le déterminant se réduit, en vertu des relations connues, à

$$-\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc.$$

Cette quantité est celle qui, égalée à zéro, donne la condition d'égalité de deux racines de l'équation (1); donc cette condition peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

130. VII. Considérons le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

formé avec les puissances des degrés

$$0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$$

de n quantités quelconques

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,$$

et comparons ce déterminant avec le produit

$$\begin{aligned} P = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\dots(a_n - a_1) \\ \times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\dots(a_n - a_2) \\ \times (a_4 - a_3)\dots(a_n - a_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \times (a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

des différences ou termes qui se trouvent chacune de n quantités de toutes celles qui la suivent.

Le déterminant s'évanouit lorsque deux quantités a_i, a_k deviennent égales entre elles. Il est donc divisible par toutes les différences $a_k - a_i$ de ces quantités prises deux à deux, et par conséquent par le produit P de toutes ces différences.

De plus, le déterminant et le produit sont l'un et l'autre des polynômes du degré

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

par rapport à l'ensemble des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; donc le quotient de ces deux polynômes ne peut être qu'une quantité indépendante de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pour obtenir ce quotient, il suffit de comparer deux termes de ces polynômes qui soient affectés des mêmes puissances de a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Tels sont, d'une part, le terme principal du déterminant,

$$a_2 a_3^2 \ldots a_n^{n-1},$$

et, d'autre part, le produit des premiers termes de tous les facteurs binômes de P, lequel a le même coefficient $+1$ que le terme principal du déterminant. Il suit de là que l'on a

$$R = P.$$

Le nombre des termes du déterminant est

$$1.2.3\ldots n;$$

celui des termes du produit est, avant les réductions,

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On voit par là que, en général, le déterminant se présente sous une forme plus simple que le produit. Ainsi, pour $n = 6$, le déterminant contient $1.2.3.4.5.6 = 720$ termes, tandis que le produit en contient $2^{15} = 32768$.

Représentons par

$$r = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots$$

l'équation dont $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines. Si l'on multiplie le premier membre de cette équation par la valeur précédente de P, le produit, d'après ce qu'on vient de démontrer, sera égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & x^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}.$$

Développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière ligne verticale [27], et l'identifiant avec le produit

$$x^n - A_1 x^{n-1} \ldots - A_n \; P,$$

on a les identités suivantes :

$$-\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \\ a_1 & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad A_1 P,$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-3} & \ldots & a_n^{n-3} \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \quad A_2 P,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = A_{n-1} P,$$

$$-(-1)^n\begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = A_n P.$$

§ IV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

131. Soit donné le système d'équations

$$\begin{array}{l} a'_1 x' + a''_1 x'' + \ldots + a^{(r)}_1 x^{(r)} = u_1, \\ a'_2 x' + a''_2 x'' + \ldots + a^{(r)}_2 x^{(r)} = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a'_n x' + a''_n x'' + \ldots + a^{(r)}_n x^{(r)} = u_n. \end{array}$$

Formons le déterminant de ce système d'équations,

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \ldots & a^{(r)}_1 \\ a'_2 & a''_2 & \ldots & a^{(r)}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & \ldots & a^{(r)}_n \end{vmatrix},$$

et soit $\mathrm{A}^{(i)}_k$ le coefficient de $a^{(i)}_k$ dans ce déterminant. La somme

$$\mathrm{A}^{(i)}_1 a^{(j)}_1 + \mathrm{A}^{(i)}_2 a^{(j)}_2 + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_n a^{(j)}_n$$

est égale à R pour $j = i$ [114] et nulle pour toute valeur de j différente de i [116]. Si donc on ajoute les équations proposées, après les avoir multipliées respectivement par

$$\mathrm{A}^{(i)}_1, \quad \mathrm{A}^{(i)}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}^{(i)}_n,$$

le multiplicateur de $x^{(i)}$ deviendra égal à R, et ceux de toutes les autres inconnues s'évanouiront. On aura donc

$$\mathrm{R}.x^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}_1 u_1 + \mathrm{A}^{(i)}_2 u_2 + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_n u_n$$

$$= \begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & a^{(i-1)}_1 & u_1 & a^{(i+1)}_1 & \ldots & a^{(r)}_1 \\ a'_2 & \ldots & a^{(i-1)}_2 & u_2 & a^{(i+1)}_2 & \ldots & a^{(r)}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & \ldots & a^{(i-1)}_n & u_n & a^{(i+1)}_n & \ldots & a^{(r)}_n \end{vmatrix},$$

le second membre étant ce que devient R lorsqu'on y remplace les coefficients

$$a^{(i)}_1, \quad a^{(i)}_2, \quad \ldots, \quad a^{(i)}_n$$

de $x^{(i)}$ par les seconds membres des équations données correspondantes

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n.$$

Cette formule donnera pour les n inconnues des valeurs finies et déterminées, toutes les fois que le déterminant R sera différent de zéro.

132. Si les seconds membres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont tous nuls, à l'exception d'un seul, de u_n par exemple, on aura simplement

$$\mathrm{R}x^{(i)} = \mathrm{A}_n^{(i)} u_n;$$

donc les valeurs de

$$x', \quad x'', \quad \ldots, \quad x^{(n)}$$

seront proportionnelles aux déterminants partiels

$$\mathrm{A}_n', \quad \mathrm{A}_n'', \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n^{(n)},$$

de sorte qu'on aura, pour solution des équations proposées,

$$\frac{x'}{\mathrm{A}_n'} = \frac{x''}{\mathrm{A}_n''} = \ldots = \frac{x^{(n)}}{\mathrm{A}_n^{(n)}} = \frac{u_n}{\mathrm{R}}.$$

133. Si u_n est nul aussi, les équations qui déterminent les inconnues dans le n° 131 prendront la forme

$$\mathrm{R}x^{(i)} = 0,$$

et, si R n'est pas nul, les valeurs de toutes les inconnues x', x'', ..., $x^{(n)}$ seront égales à zéro.

134. Mais, si les équations à seconds membres nuls

$$\begin{aligned}
&a_1'x' + a_1''x'' + \ldots + a_1^{(n)}x^{(n)} = 0,\\
&a_2'x' + a_2''x'' + \ldots + a_2^{(n)}x^{(n)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&a_n'x' + a_n''x'' + \ldots + a_n^{(n)}x^{(n)} = 0
\end{aligned}$$

doivent avoir lieu sans que les valeurs des inconnues x', x'', ...,

$x^{(n)}$ se réduisent toutes à zéro, les relations

$$R = 0,$$

que l'on en déduit, ne peuvent être satisfaites que si l'on a

$$R = 0,$$

sans quoi ces équations seraient incompatibles.

Cette condition étant remplie, ces équations ne déterminent plus les valeurs mêmes de $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, mais seulement les rapports de ces valeurs; car, si ces équations sont satisfaites par un système de valeurs $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, elles le seront aussi par les valeurs $\lambda x'$, $\lambda x'', \ldots, \lambda x^{(n)}$, quel que soit le facteur λ. D'ailleurs ces rapports seront, en général, déterminés, puisque $n-1$ des équations données suffisent généralement pour déterminer les $n-1$ inconnues

$$\frac{x'}{x^{(n)}}, \quad \frac{x''}{x^{(n)}}, \quad \ldots, \quad \frac{x^{(n-1)}}{x^{(n)}}.$$

Or, à cause de $R = 0$, on a les n équations

$$\begin{aligned}
&a'_1 A'_1 + a'_2 A'_2 + \ldots + a'_n A'_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a'_1 A'_k + a'_2 A''_k + \ldots + a'_n A^{(n)}_k = R = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a'_1 A^{(n)}_1 + a'_2 A^{(n)}_2 + \ldots + a'_n A^{(n)}_n = 0,
\end{aligned}$$

qui donnent, pour les rapports

$$\frac{A'_k}{A^{(n)}_k}, \quad \frac{A''_k}{A^{(n)}_k}, \quad \ldots, \quad \frac{A^{(n-1)}_k}{A^{(n)}_k},$$

des valeurs identiques à celles que donnent les équations proposées pour les rapports

$$\frac{x'}{x^{(n)}}, \quad \frac{x''}{x^{(n)}}, \quad \ldots, \quad \frac{x^{(n-1)}}{x^{(n)}};$$

donc $A'_k, A''_k, \ldots, A^{(n)}_k$ sont proportionnels à $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, quel

---

[1] Il suffit pour cela que l'un des n^2 déterminants partiels de R ne soit pas nul.

que soit l'indice k, de sorte qu'on a les proportions

$$\begin{aligned} x' : x'' : \ldots : x^{(n)} &= A'_1 : A''_1 : \ldots : A^{(n)}_1 \\ &= A'_2 : A''_2 : \ldots : A^{(n)}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= A'_n : A''_n : \ldots : A^{(n)}_n. \end{aligned}$$

Donc, lorsqu'un déterminant s'évanouit, les déterminants partiels correspondants à deux lignes d'éléments quelconques parallèles entre elles forment généralement deux suites de grandeurs proportionnelles.

135. Si l'on suppose $x_n = 1$, les équations précédentes deviennent n équations entre $n-1$ inconnues, et l'on voit que la condition de compatibilité de n équations à $n-1$ inconnues consiste en ce que le déterminant de tous les coefficients, y compris les termes tout connus, doit s'évanouir. Les proportions du numéro précédent donnent alors n expressions équivalentes pour le système des valeurs des inconnues

$$x', \quad x'', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}.$$

Cette condition de compatibilité $R = 0$ n'est autre chose que l'équation résultant de l'élimination des $n-1$ inconnues entre les n équations données. Donc, pour éliminer $n-1$ inconnues entre n équations du premier degré, on égalera à zéro le déterminant de degré n formé avec les n^2 coefficients de ces équations, y compris les termes tout connus.

136. Parmi les proportions du n° 47, considérons celles de la dernière ligne, par exemple,

$$(1) \qquad x' : x'' : \ldots : x^{(n)} = A'_n : A''_n : \ldots : A^{(n)}_n.$$

Les coefficients de la dernière des équations proposées

$$a'_n x' + a''_n x'' + \ldots + a^{(n)}_n x^{(n)} = 0,$$

n'entrant pas dans les expressions de $A'_n, A''_n, \ldots, A^{(n)}_n$, il en résulte que les proportions (1) font connaître les rapports des inconnues

x', x'', ..., $x^{(n)}$, qui satisfont aux $n-1$ équations

$$a'_1 x' + a''_1 x'' + \ldots + a^{(n)}_1 x^{(n)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a'_{n-1} x' + a''_{n-1} x'' + \ldots + a^{(n)}_{n-1} x^{(n)} = 0,$$

exprimées au moyen des déterminants partiels que l'on peut former avec les $n(n-1)$ coefficients de ces équations, en supprimant tour à tour chacune des lignes verticales.

Donc, étant données n équations homogènes entre $n+1$ inconnues

$$a'_1 x' + a''_1 x'' + \ldots + a^{(n+1)}_1 x^{(n+1)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a'_n x' + a''_n x'' + \ldots + a^{(n+1)}_n x^{(n+1)} = 0,$$

si l'on pose

$$R = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & a^{(n)}_1 & a^{(n+1)}_1 & \ldots & a^{(2n)}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & \ldots & a^{(n)}_n & a^{(n+1)}_n & \ldots & a^{(2n)}_n \end{vmatrix},$$

la solution des équations proposées sera donnée par les proportions

$$x' : x'' : \ldots : x^{(n+1)} = R' : R'' : \ldots : R^{(n+1)}.$$

137. Si, dans les équations du numéro précédent, on suppose

$$x^{(n+1)} = 1, \quad \text{et} \quad a^{(n+1)}_1 = u_1, \quad \ldots, \quad a^{(n+1)}_n = u_n,$$

on retrouve le système des équations du n° **131**. Alors

$$R', R'', \ldots, R^{(n)}, R^{(n+1)} = R$$

sont les déterminants partiels du déterminant de degré $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \ldots & a^{(n)}_1 & -u_1 \\ a'_2 & a''_2 & \ldots & a^{(n)}_2 & -u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & \ldots & a^{(n)}_n & -u_n \\ x' & x'' & \ldots & x^{(n)} & r \end{vmatrix},$$

relatifs aux éléments de la dernière ligne horizontale, où r représente une variable auxiliaire indéterminée; donc la solution des

équations du n° 44 sera donnée par les proportions

$$1 : x' : x'' : \ldots : x^{(n)} = D_r\Delta : D_{x'}\Delta : D_{x''}\Delta : \ldots : D_{x^{(n)}}\Delta.$$

138. Si, au lieu du système d'équations du n° 131, on proposait le système suivant :

$$\begin{aligned}
&a'_1 u_1 + a'_2 u_2 + \ldots + a'_n u_n = x', \\
&a''_1 u_1 + a''_2 u_2 + \ldots + a''_n u_n = x'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a^{n}_1 u_1 + a^{n}_2 u_2 + \ldots + a^{n}_n u_n = x^{n},
\end{aligned}$$

le déterminant R serait le même que pour le premier système. De plus, les valeurs des nouvelles inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seraient données, au moyen du même déterminant Δ de degré $n+1$, par les proportions

$$1 : u_1 : u_2 : \ldots : u_n = D_r\Delta : D_{u_1}\Delta : D_{u_2}\Delta : \ldots : D_{u_n}\Delta.$$

§ V.

ÉLIMINATION D'UNE INCONNUE ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

139. Soient données deux équations algébriques

$$1 \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0,$$

$$2 \qquad F(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0,$$

l'une du degré m, l'autre du degré n par rapport à l'inconnue x, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$ étant des fonctions d'une autre inconnue y.

Si ces équations peuvent être satisfaites par le système de valeurs

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

cela veut dire que, en faisant $y = \beta$ dans tous les coefficients a_0, $a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, on fait acquérir aux deux équations proposées une racine commune $x = \alpha$. Le problème de la résolution de deux équations simultanées revient donc : 1° à déterminer les valeurs de y qui font acquérir aux deux équations en x une racine com-

mune; 2° à déterminer la racine commune $x = z$ qui correspond à chaque valeur trouvée $y = \beta$.

Si une valeur de x et une valeur de y satisfont simultanément aux deux équations, elles satisferont également à toute combinaison *légitime* de ces équations, et, si l'on effectue cette combinaison de manière à éliminer x, l'équation obtenue déterminera les valeurs cherchées de y, qui font acquérir aux deux équations données une racine commune en x; donc le problème se ramène d'abord à trouver cette combinaison, que l'on appelle la *résultante* des équations proposées.

140. La première de ces équations, $\varphi(x) = 0$, admet m racines

$$(3) \qquad z_1, z_2, \ldots, z_m,$$

et la seconde, $\chi(x) = 0$, en admet n,

$$(4) \qquad z'_1, z'_2, \ldots, z'_n,$$

toutes ces racines étant des fonctions de y. Si ces racines étaient données explicitement, on aurait, en égalant successivement chaque racine de la première série à chaque racine de la seconde, mn équations de la forme

$$(5) \qquad z_i - z'_s = 0,$$

dont chacune exprimerait une condition suffisante pour faire acquérir aux deux équations en x une racine commune, et, de plus, il est clair qu'une telle racine commune ne peut exister qu'autant que l'une des équations (5) est satisfaite. En tirant de l'une des équations (5) la valeur de y, on en conclurait, pour la valeur correspondante de x,

$$x = z_i = z'_s.$$

Si l'on prend pour z'_s successivement toutes les racines (4) de l'équation (2), on aura n équations de la forme (5), dont l'ensemble pourra être représenté sous la forme

$$z_i - z'_1 \quad z_i - z'_2 \quad \ldots \quad z_i - z'_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{b_n} f(z_i) = 0.$$

En prenant maintenant pour α_r successivement toutes les racines (3) de l'équation (1), on aura m équations analogues à la précédente, que l'on pourra réunir, par multiplication, en une équation unique

$$(6) \qquad \left(\frac{1}{b_n}\right)^m \chi(z_1)\,\chi(z_2)\cdots\chi(z_m) = 0,$$

laquelle équivaut aux mn équations (5). Ce sera donc l'équation *résultante* ou équation *finale*, qui déterminera toutes les valeurs admissibles de y.

On aurait pu former autrement cette équation en faisant d'abord varier l'indice r, ce qui donne, par la multiplication des m différences correspondantes,

$$(z_1 - z'_1)(z_2 - z'_2)\cdots(z_m - z'_s) = (-1)^m \frac{1}{a_m}\,\varphi(z'_s) = 0;$$

puis, en faisant le produit des expressions analogues pour $s = 1, 2, \ldots, n$,

$$(7) \qquad (-1)^{mn}\left(\frac{1}{a_m}\right)^n \varphi(z'_1)\,\varphi(z'_2)\cdots\varphi(z'_n) = 0.$$

Les deux équations (6) et (7) ne peuvent qu'être identiques entre elles, puisque leurs premiers membres représentent les produits des mêmes facteurs.

141. $\chi(x)$ étant une fonction du premier degré des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$, le produit

$$\chi(z_1)\,\chi(z_2)\cdots\chi(z_m)$$

sera une fonction homogène du degré m par rapport à ces coefficients, et par conséquent le premier membre de l'équation (6) sera un polynôme du degré m par rapport aux coefficients

$$(8) \qquad \frac{b_0}{b_n}, \quad \frac{b_1}{b_n}, \quad \ldots, \quad \frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

Par une raison analogue, le premier membre de l'équation (7) sera

un polynôme du degré n par rapport aux coefficients

$$(9) \qquad \frac{a_0}{a_m}, \quad \frac{a_1}{a_m}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

Donc le premier membre de l'équation résultante sera une fonction rationnelle et entière des coefficients (8) et (9), ce qui résultait d'ailleurs de ce que les premiers membres des équations (6) et (7) sont respectivement des fonctions symétriques des racines des équations (1) et (2), et, de plus, ce premier membre est du degré m par rapport aux coefficients $\frac{b_k}{b_n}$, et du degré n par rapport aux coefficients $\frac{a_k}{a_m}$.

142. Un terme quelconque du premier membre de (8) est de la forme

$$\frac{b_i}{b_n} \frac{b_j}{b_n} \ldots \frac{a_r}{a_m} \frac{a_s}{a_m} \ldots$$

$\Sigma \alpha_p^g \alpha_s^h \ldots$ désignant une fonction symétrique des racines de (1), laquelle s'exprime par une fonction rationnelle et entière des coefficients (9). Chaque terme de cette fonction est de la forme

$$(10) \qquad \frac{a_0}{a_m} \frac{a_1}{a_m} \ldots,$$

le nombre des facteurs (y compris $\frac{a_m}{a_m}$) étant égal à n.

Si l'on multiplie maintenant les racines de l'équation (1) par un facteur arbitraire t, en changeant l'équation (1) dans la suivante :

$$x^m + \ldots + \frac{a_k}{t^k} x^k + \ldots + \frac{a_m}{t^m} x^m = 0,$$

la somme $\Sigma \alpha_p^g \alpha_s^h \ldots$ sera, d'une part, multipliée par

$$t^{\ldots};$$

d'autre part, le coefficient $\frac{a_k}{a_m}$ étant remplacé par $\frac{a_k}{a_m} t^{m-k}$, le pro-

duit (10) sera multiplié par

$$t^{m(\lambda+m+\mu+\ldots)} = t^{mn-(\lambda+\mu+\ldots)}.$$

Pour que le polynôme soit par là-même multiplié par $t^{g+h+\ldots}$, il faut évidemment que l'on ait

$$g+h+\ldots = mn - \lambda + \mu + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$g+h+\ldots+\lambda+\mu+\ldots = mn.$$

Donc, dans chaque terme de l'équation finale, en ayant soin de ne pas simplifier les fractions $\frac{a_m}{a_m}$ et $\frac{b_n}{b_n}$ lorsqu'elles s'y rencontrent, la somme des indices des numérateurs des facteurs (8) et (9) est constante et égale à mn. En d'autres termes, si l'on réduit au même dénominateur $a_m^n b_n^m$ le premier membre de l'équation résultante (6) ou (7), la somme des indices de tous les coefficients a_i et b_k, dans chaque terme du polynôme numérateur, est constamment égale à mn.

143. Si $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ sont des polynômes *complets* des degrés m et n par rapport à x et à y, alors $\frac{a_\lambda}{a_m}$ sera du degré $m-\lambda$ et $\frac{b_g}{b_n}$ du degré $n-g$ en y; donc le degré d'un terme quelconque de l'équation résultante en y sera [140]

$$m-\lambda+m-\mu+\ldots+n-g+n-h+\ldots$$
$$2mn-\lambda-\mu-\ldots-g-h-\ldots = 2mn-mn = mn.$$

Donc le degré de l'équation finale, sauf les réductions qui peuvent l'abaisser, est généralement égal au produit des degrés des deux équations proposées.

144. Si, par un moyen quelconque, on a, en éliminant x, déduit des équations proposées une résultante

$$R = 0,$$

où l'on n'ait supprimé aucun facteur, cette équation doit être satisfaite par toute valeur de y qui fait acquérir une solution commune

aux deux équations proposées, et par suite, par toute valeur qui annule le produit des facteurs

$$[illegible] y'.$$

Donc R devra être divisible par chacun des premiers membres des équations (6) et (7), exprimés au moyen des coefficients $a_0, a_1, \ldots$, $b_0, b_1, \ldots$.

Si, de plus, R est de même degré que ces produits, tant par rapport aux coefficients (8) que par rapport aux coefficients (9), c'est-à-dire du degré m par rapport aux premiers et du degré n par rapport aux seconds, la fonction R et le produit (6) ou (7) seront des polynômes de même degré, en y considérant les coefficients comme indépendants les uns des autres. Ils seront donc identiques, à un facteur près indépendant de y; donc alors $R = 0$ sera la véritable équation finale, donnant toutes les bonnes valeurs de y, sans solution étrangère.

Mais, si R est d'un degré plus élevé que l'un ou l'autre de ces produits par rapport aux coefficients (8) ou (9), l'équation $R = 0$ admettra des solutions étrangères.

145. Voyons maintenant comment on pourra obtenir, par l'élimination de x, cette équation

$$R = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\varphi(x)$ soit du quatrième degré et $\chi(x)$ du troisième degré en x, de sorte que l'on ait

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$
$$\chi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3.$$

Formons les identités

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$
$$x\varphi(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5,$$
$$x^2\varphi(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + a_4 x^6,$$
$$\chi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3,$$
$$x\chi(x) = b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4,$$
$$x^2\chi(x) = b_0 x^2 + b_1 x^3 + b_2 x^4 + b_3 x^5,$$
$$x^3\chi(x) = b_0 x^3 + b_1 x^4 + b_2 x^5 + b_3 x^6.$$

et composons le déterminant de leurs coefficients,

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Si l'on représente ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_6 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_6 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{\text{VI}}_0 & c^{\text{VI}}_1 & c^{\text{VI}}_2 & \ldots & c^{\text{VI}}_6 \end{vmatrix},$$

en posant

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \quad a_1 = c_1, \quad \ldots, \quad a_3 = c_3, \quad 0 = c_4, \quad \ldots \\ b_0 &= c''_0, \quad b_1 = c''_1, \quad \ldots, \quad b_3 = c''_3, \quad 0 = c''_4, \quad \ldots, \end{aligned}$$

et que l'on désigne par $C_k^{(l)}$ le multiplicateur de $c_k^{(l)}$ dans la valeur de R, on aura, en multipliant les identités précédentes par

$$C_k, \quad C'_k, \quad \ldots, \quad C''_k, \quad \ldots, \quad C^{\text{VI}}_k,$$

et ajoutant,

$$\begin{aligned} &(C_k + C'_k x + C''_k x^2 + \ldots)\varphi(x) + (C'''_k + C^{\text{IV}}_k x + C^{\text{V}}_k x^2 + C^{\text{VI}}_k x^3 + \ldots)\chi(x) \\ &= C_k c_0 + C'_k c'_0 + \ldots + C_k c_1 + C'_k c'_1 + \ldots x + \ldots \\ &\quad + C_k c_k + C'_k c'_k + \ldots x^k + \ldots. \end{aligned}$$

Dans le second membre, les multiplicateurs de toutes les puissances de x sont identiquement nuls [117], à l'exception du coefficient de x^k, qui est égal à R [26]. On a donc identiquement

$$(11)\quad R x^k = (C_k + C'_k x + C''_k x^2 + \ldots)\varphi(x) + (C'''_k + C^{\text{IV}}_k x + C^{\text{V}}_k x^2 + C^{\text{VI}}_k x^3 + \ldots)\chi(x).$$

Tout système de valeurs de x et y qui donne à la fois $\varphi(x) = 0$ et $\chi(x) = 0$ annule donc R. L'équation $R = 0$ contient donc la résultante des deux proposées. D'ailleurs, le polynôme R est du troi-

sième degré par rapport aux coefficients $a_0, a_1, \ldots$, et du quatrième degré par rapport aux coefficients $b_0, b_1, \ldots$. Donc R est, à un facteur constant près, le produit de $a_1^3 b_3^1$ par le premier membre de l'équation résultante cherchée. Si donc l'équation

$$a_1^3 b_3^1 = 0$$

ne peut donner de valeur admissible pour y, $R = 0$ sera l'équation résultante cherchée.

146. *Exemples.* I. — Soient les équations

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
$$0 = b_0 + b_1 x.$$

L'équation finale sera

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$a_0 b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2 = 0.$$

II. Soient les deux équations du second degré

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
$$0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

L'équation résultante sera

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 - \frac{b_0}{a_0} a_1 & b_2 - \frac{b_0}{a_0} a_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

147. Après avoir déterminé les valeurs de y qui rendent les équations (1) et (2) compatibles, il faut ensuite déterminer les valeurs correspondantes de x. Le déterminant R étant nul, les valeurs des inconnues

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

seront proportionnelles [134] aux déterminants partiels correspondants à une même ligne horizontale. On aura donc, dans le cas du n° 145,

$$1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 = C_1^i : C_2^i : C_3^i : C_4^i : C_5^i : C_6^i,$$

i désignant un quelconque des nombres 0, 1, 2, ..., 6.

Dans le cas de $m = n = 2$, on trouve, en développant,

$$1 : x : x^2 : x^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix},$$

où l'on pourrait remplacer les déterminants partiels relatifs à la première ligne horizontale par les déterminants partiels relatifs à une autre ligne horizontale quelconque.

§ VI.

PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS.

148. Soient deux déterminants de même degré

$$P = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \ldots & a_1^{(n)} \\ a'_2 & a''_2 & \ldots & a_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & a''_n & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} b'_1 & b''_1 & \ldots & b_1^{(n)} \\ b'_2 & b''_2 & \ldots & b_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_n & b''_n & \ldots & b_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Multiplions successivement, élément à élément, chaque ligne horizontale du premier par chaque ligne horizontale du second, et ajoutons les produits, de manière à former les n^2 expressions

$$c_k^{(i)} = a'_i b'_k + a''_i b''_k + \ldots + a_i^{(n)} b_k^{(n)},$$

l'indice supérieur de $c_k^{(i)}$ se rapportant au rang de la ligne de P,

l'indice inférieur au rang de la ligne de Q. Puis, avec les éléments $c_k^{(i)}$ ainsi obtenus, formons le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} c_1 & c_1' & \dots & c_1^{(n-1)} \\ c_2 & c_2' & \dots & c_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_n' & \dots & c_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Si l'on écrit, pour abréger,

$$\Delta = \sum_{p} a_1^p a_2^p \dots a_n^p \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

le terme principal de R sera

$$\Delta \Delta' \dots \Delta^{(n-1)} = \sum_{p} a_1^p \cdot \sum_{q} a_2^q \dots \sum_{t} a_n^t$$

$$= \sum_{p, q, \dots, t} a_1^p a_2^q \dots a_n^t \cdot b_1^p b_2^q \dots b_n^t,$$

chacun des indices $p, q, \dots, t$ devant recevoir toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$.

Pour permuter les indices inférieurs de c, il suffira de permuter les indices inférieurs de b; et, si nous désignons par

$$[p q \dots t]$$

le signe + ou — qui correspond à la classe de la disposition

$$p, q, \dots, t$$

des nombres $1, 2, \dots, n$, nous aurons

$$R = \sum_{p, q, \dots, t} [p q \dots t] c_1^p c_2^q \dots c_n^t$$

$$= \sum_{p, q, \dots, t} [p q \dots t] \left\{ \sum_{p} a_1^p c_2^p \dots c_n^{(n-1)} \right\} \left\{ \sum_{q} a_1^q c_2^q \dots c_n^{(n-1)} \right\} \dots \left\{ \sum_{t} a_1^t c_2^t \dots c_n^{(n-1)} \right\}$$

$$= \sum_{p, q, \dots, t} a_1^p a_2^q \dots a_n^t \sum_{p, q, \dots, t} [p q \dots t] b_1^p b_2^q \dots b_n^t.$$

Or on a

$$Q = \sum_{p, q, \dots, t} [p q \dots t] b_1^p b_2^q \dots b_n^t.$$

Donc $\sum_{ij\ldots l} [ij\ldots l] b_i^{(p)} b_j^{(q)} \ldots b_l^{(t)}$ est ce que devient Q, lorsqu'on y change les indices supérieurs 1, 2, ..., n en p, q, ..., t. Cette somme est donc égale à

$$[pq\ldots t].\mathrm{Q},$$

$[pq\ldots t]$ désignant le signe de la classe de la disposition $p, q, \ldots, t$, toutes les fois que l'on donne à ces n indices des valeurs toutes différentes entre elles. Au contraire, cette somme s'annulera toutes les fois que deux des indices $p, q, \ldots, t$ seront égaux entre eux. Donc on aura, en ne conservant que les dispositions dans lesquelles les indices $p, q, \ldots, r$ seront tous différents,

$$1) \qquad \mathrm{R} = \mathrm{Q}.\sum_{pq\ldots t} [pq\ldots t] a_1^p a_2^q \ldots a_n^t,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}.\mathrm{Q}.$$

Donc le produit de deux déterminants de degré n est un déterminant de degré n, dont les éléments $c_k^{(i)}$ se forment d'après la règle indiquée ci-dessus.

149. Comme on peut, dans chacun des déterminants P et Q, changer les lignes horizontales en lignes verticales, et *vice versa* [102], on voit qu'il y a quatre manières différentes de former les éléments $c_k^{(i)}$ du produit R, suivant que l'on multiplie les lignes $\left\{\begin{matrix}\text{horizontales}\\ \text{ou verticales}\end{matrix}\right\}$ de P par les lignes $\left\{\begin{matrix}\text{horizontales}\\ \text{ou verticales}\end{matrix}\right\}$ de Q.

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a'\alpha + b'\beta \\ a\alpha' + b\beta' & a'\alpha' + b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + a'\beta & b\alpha + b'\beta \\ a\alpha' + a'\beta' & b\alpha' + b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha' & a'\alpha + b'\alpha' \\ a\beta + b\beta' & a'\beta + b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + a'\alpha' & b\alpha + b'\alpha' \\ a\beta + a'\beta' & b\beta + b'\beta' \end{vmatrix}.$$

150. Si l'on suppose le second déterminant égal au premier, on obtiendra le carré de celui-ci, sous forme d'un déterminant du même degré.

Les éléments de ce carré pourront se former de trois manières différentes. Ainsi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & aa' + bb' \\ aa' + bb' & a'^2 + b'^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + ab & ab' + ab' \\ aa' + bb' & a'a' + bb' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + ab & ab' + ab' \\ ab + ab' & b^2 + b'^2 \end{vmatrix}.$$

On voit de même que les diverses puissances d'un déterminant peuvent se mettre sous la forme de déterminants du même degré.

151. Si les déterminants P, Q étaient de degrés différents, on commencerait par transformer celui du moindre degré en un déterminant du même degré que l'autre [113], puis on appliquerait la règle précédente.

On a ainsi

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ a' & b' & b'' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b' & c' \\ a'' & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \beta' & 0 \\ \alpha'' & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\alpha' + b\beta' & a''\alpha + b''\beta \\ a\alpha' + b\beta' & a'\alpha' + b'\beta' & a''\alpha' + b''\beta' \\ a\alpha'' + b\beta'' + c'' & a'\alpha'' + b'\beta'' + c'' & a''\alpha'' + b''\beta'' + c'' \end{vmatrix},$$

les quantités α'', β'' étant arbitraires.

152. Supposons maintenant que, au lieu de former les éléments c_k^m par la multiplication des lignes de deux tableaux carrés, on les forme par la multiplication de deux tableaux rectangulaires

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \dots & a^{m}_1 \\ a'_2 & a''_2 & \dots & a^{m}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n & a''_n & \dots & a^{m}_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b'_1 & b''_1 & \dots & b^{m}_1 \\ b'_2 & b''_2 & \dots & b^{m}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_n & b''_n & \dots & b^{m}_n \end{vmatrix},$$

les doubles traits indiquant que m n'est pas égal à n. Alors, dans la formule (1) [148], $p, q, \ldots, t$ seront n nombres quelconques de la suite $1, 2, \ldots, m$.

Si $m > n$, on prendra pour $p, q, \ldots, t$ successivement toutes les combinaisons des m indices supérieurs n à n, et alors

$$\sum_{pq\ldots t} [pq\ldots t]\, a_1^p\, a_2^q \ldots a_n^t$$

représentera la somme de tous les déterminants formés en prenant n à n les m lignes verticales du premier tableau, et Q devra être remplacé par le déterminant formé au moyen des lignes verticales correspondantes du second tableau. On aura donc, dans ce cas,

$$R = \Sigma\, P.Q\,,$$

le signe Σ se rapportant à toutes les combinaisons des m indices supérieurs pris n à n.

On aura ainsi, en représentant, par analogie, par le signe de multiplication placé entre les deux tableaux rectangulaires le déterminant R formé d'après la même règle que le produit de deux véritables déterminants,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma & a'\alpha + b'\beta + c'\gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

153. Si, au contraire, on a $m < n$, alors, parmi les m indices $p, q, \ldots, t$, il y en aura au moins deux qui seront égaux entre eux, et par conséquent

$$\sum_{qr\ldots t} [qr\ldots t]\, b_1^q\, b_2^r \ldots b_t^t$$

sera nul; donc on aura, dans ce cas,

$$R = 0.$$

Par exemple, on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a'\alpha + b'\beta & a''\alpha + b''\beta \\ a\alpha' + b\beta' & a'\alpha' + b'\beta' & a''\alpha' + b''\beta' \\ a\alpha'' + b\beta'' & a'\alpha'' + b'\beta'' & a''\alpha'' + b''\beta'' \end{vmatrix} = 0.$$

EXERCICES.

1. On appelle déterminant *gauche* un déterminant dont les éléments, placés symétriquement par rapport à la diagonale, sont égaux et de signes contraires, les éléments de la diagonale étant nuls, de sorte qu'on ait

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0.$$

Faire voir qu'un déterminant gauche de degré impair est identiquement nul.

2. Réduire à un monôme le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin z & \sin 2z & \sin 3z \\ \sin 3z & \sin 6z & \sin 9z \\ \sin 5z & \sin 10z & \sin 15z \end{vmatrix},$$

et, plus généralement, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin z & \sin 2z & \dots & \sin nz \\ \sin 3z & \sin 6z & \dots & \sin 3nz \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(2n-1)z & \sin(4n-2)z & \dots & \sin(2n^2-n)z \end{vmatrix}.$$

3. Développer, suivant les puissances de x, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}.$$

4. Une substitution *linéaire*

$$x_k = a_k^{(1)} y_1 + a_k^{(2)} y_2 + \dots + a_k^{(n)} y_n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

est dite *orthogonale* lorsqu'elle satisfait, quelles que soient les valeurs des variables x_k, y_i, à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Prouver que, dans ce cas, le déterminant des coefficients $a_k^{(i)}$ est égal à ± 1.

5. A'_k étant le déterminant mineur correspondant à l'élément a'_k du déterminant

$$R = \left| a'_1 a''_2 \ldots a^{(n)}_n \right|,$$

si l'on forme, par la règle du § VI, le produit de R par son déterminant *adjoint*

$$S = \left| A'_1 A''_2 \ldots A^{(n)}_n \right|,$$

conclure de là que l'on a

$$S = R^{n-1}.$$

LIVRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

DES FONCTIONS ET DE LA CONTINUITÉ. — INFINIMENT PETITS ET INFINIMENT GRANDS. — LIMITES. — SUBSTITUTION DES INFINIMENT PETITS.

§ I.

CONSTANTES ET VARIABLES. — FONCTIONS. — INFINIMENT PETITS ET INFINIMENT GRANDS. — NOTION DES LIMITES. — APPLICATION AUX NOMBRES INCOMMENSURABLES.

154. On appelle *constante* une quantité que l'on considère comme ne changeant pas de valeur dans le cours d'un même raisonnement.

On appelle *variable* une quantité qui n'a pas de valeur déterminée, mais qui peut recevoir une suite plus ou moins étendue de valeurs arbitraires.

On ramène l'étude des quantités variables à celle des quantités constantes en fixant momentanément un état de la variable, et traitant celle-ci comme une constante. Si les relations trouvées sont indépendantes du choix particulier de l'état considéré, on obtient des lois auxquelles sont soumises, dans tous leurs états, les quantités variables; en remplaçant, dans chacune de ces relations, les valeurs déterminées par les symboles qui représentent des va-

leurs variables, on obtiendra une relation entre les variables, équivalente à une infinité de relations de même nature entre des valeurs constantes. Par exemple, l'équation d'une courbe équivaut à une infinité de relations, de forme identique, entre les coordonnées de tel ou tel point de la courbe.

155. Une même quantité peut jouer tour à tour le rôle de constante et celui de variable, suivant le point de vue où l'on se place. Ainsi, dans l'étude générale d'une courbe, les coordonnées d'un point de cette courbe sont considérées comme variables. Dans l'étude de la tangente en un point donné de la courbe, les coordonnées du point de contact sont considérées comme constantes, celles d'un point de la tangente étant maintenant les variables.

Dans chaque question, on doit s'attacher avant tout à bien distinguer quelles sont les quantités que l'on regarde comme constantes ou comme variables dans telle ou telle partie du raisonnement.

156. Si la valeur d'une variable y est déterminée par la valeur d'une autre variable x, de telle sorte qu'à chaque valeur de x correspondent soit une seule valeur de y, soit plusieurs valeurs de cette quantité, en nombre fini dans un intervalle fini quelconque, on dit en général que y est une *fonction* de x.

Si la détermination de y au moyen de x résulte d'opérations ou de constructions rigoureusement définies et exprimables à l'aide des opérations fondamentales de l'Analyse, la fonction y sera dite une *fonction analytique*.

Dans cet Ouvrage, nous nous occuperons exclusivement des fonctions analytiques, ou des fonctions de nature quelconque possédant les mêmes propriétés que les fonctions analytiques.

Si la variable x n'est elle-même déterminée par aucune relation avec une autre variable, on lui donne le nom de *variable indépendante*.

157. En général, lorsque deux variables sont liées entre elles par une relation déterminée, en vertu de laquelle l'une d'elles est fonction de l'autre, on peut réciproquement considérer la seconde comme une fonction de la première. Ainsi, une courbe étant tracée, cette courbe représentera une relation entre l'abscisse et l'or-

donnée d'un quelconque de ses points, et l'on pourra considérer à volonté l'ordonnée comme une fonction de l'abscisse ou l'abscisse comme une fonction de l'ordonnée.

Les fonctions qui, pour une même relation entre deux variables, expriment la loi suivant laquelle la première se déduit de la seconde, et la loi suivant laquelle la seconde se déduit de la première, sont dites deux *fonctions inverses* l'une de l'autre.

158. Une variable peut aussi dépendre de plusieurs autres. On dit alors qu'elle est une *fonction* de plusieurs variables, et ces dernières sont appelées *indépendantes* lorsqu'elles ne sont liées ni entre elles, ni avec d'autres variables. Si l'on considère, par exemple, les trois coordonnées d'un point quelconque d'une surface, l'une d'elles peut être regardée comme une fonction des deux autres, celles-ci étant des variables indépendantes.

Généralement, lorsqu'il existe une relation entre n variables, une quelconque d'entre elles peut être regardée comme une fonction des $n-1$ autres, prises pour variables indépendantes.

Lorsqu'il existe, entre n variables, k relations (k étant $< n$), k de ces variables pourront être considérées comme fonctions des $n-k$ autres, prises pour variables indépendantes.

159. On appelle *infiniment petit* une variable qui peut prendre une valeur moindre que toute grandeur donnée, ou, comme on dit d'une manière abrégée, une *variable qui tend vers zéro*.

Ainsi une variable ε est dite infiniment petite lorsque, prise en valeur absolue, elle peut satisfaire à *toute* inégalité de la forme $\varepsilon < k$.

La *limite* d'une variable est une quantité constante dont la variable diffère d'une quantité infiniment petite, sans que cette différence puisse, en général, s'annuler.

D'après cela, un infiniment petit est une variable dont la limite est zéro.

Un *infiniment grand* est une *variable* qui peut prendre une valeur plus grande que toute grandeur donnée, ou, comme on dit, d'une manière abrégée, une *variable qui tend vers l'infini*.

En d'autres termes, une variable Ω est infiniment grande lorsque, prise en valeur absolue, elle peut satisfaire à *toute* inégalité de la forme $\Omega > k$.

L'inverse $\frac{1}{\varepsilon}$ d'un infiniment petit ε est un infiniment grand, et réciproquement, l'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit.

160. La notion d'*infiniment petit* n'a rien de commun avec la notion toute physique de *très-petit*. Celle-ci s'applique à des constantes et indique une certaine relation entre leurs dimensions et l'étendue de nos moyens de perception. Une quantité est considérée comme *très-petite* lorsqu'elle est près d'échapper à nos sens. Au contraire, une quantité *infiniment petite*, étant essentiellement *variable*, n'a pas de valeur fixe, et conséquemment sa grandeur n'est liée en rien à nos appréciations physiques. L'essence d'un infiniment petit n'est pas d'être imperceptible, mais de *pouvoir* décroître autant que l'on voudra.

Ainsi, lorsqu'on emploie les constructions géométriques dans l'étude des infiniment petits, les figures que l'on trace sur le papier ou sur le tableau représentent (abstraction faite des imperfections du dessin) les infiniment petits *en vraie grandeur*, et il est inutile de se fatiguer l'imagination pour savoir ce que deviendrait la figure lorsque les infiniment petits décroîtraient assez pour échapper à la vue.

Un infiniment petit n'est pas généralement *nul*, et ce n'est qu'exceptionnellement qu'il peut passer par la valeur zéro.

161. De même, il faut bien se garder de confondre l'*infiniment grand* mathématique soit avec le *très-grand* opposé au *très-petit* dans l'ordre des idées physiques, soit avec l'*infini absolu* pris dans le sens vulgaire et métaphysique.

L'*infiniment grand* est une *variable* pouvant prendre des valeurs quelconques, que l'on est libre de supposer plus grandes que toute quantité assignée arbitrairement. Ces valeurs sont toujours mesurables, et d'elles dépendent d'autres quantités dont on cherche les limites.

L'*infini absolu* exclut toute idée de *limitation* et de détermination, et ne peut faire, par conséquent, l'objet d'aucune spéculation mathématique. Quand cet infini se présente comme résultat d'un calcul, cela veut dire que la quantité cherchée cesse d'*exister* dans les circonstances où l'on s'est placé. La non-existence de cette

quantité indique tantôt l'impossibilité du problème dans lequel cette quantité formait l'inconnue principale, tantôt elle donne, au contraire, la solution cherchée lorsqu'elle se rapporte à une inconnue auxiliaire dont la non-existence n'est pas incompatible avec les conditions posées. Hors de ces cas, l'infini absolu doit être complétement exclu des raisonnements mathématiques comme pouvant conduire à des conclusions fausses.

162. En général, la limite d'une variable ne fait pas partie de la série des valeurs que peut prendre cette variable. Ainsi, zéro ne fait pas généralement partie de la série des valeurs d'un infiniment petit. La fraction décimale périodique 0,272727... ne peut jamais devenir égale à sa limite $\frac{3}{11}$. La diagonale d'un carré est la limite des longueurs commensurables avec le côté, et qui sont représentées par les diverses fractions dont le carré a pour limite 2; mais jamais il ne peut y avoir égalité entre ces quantités commensurables et la diagonale. L'ordonnée de l'asymptote d'une courbe est la limite de l'ordonnée de la courbe, sans pouvoir lui devenir égale, sauf le cas où la courbe oscille de part et d'autre de l'asymptote.

Une constante dont la valeur peut être démontrée moindre qu'une quantité donnée quelconque ne peut avoir d'autre valeur que zéro. C'est ce que l'on exprime d'une manière abrégée en disant qu'*une constante infiniment petite est rigoureusement nulle*.

163. Si deux variables vont l'une constamment en croissant, l'autre constamment en décroissant, et si, la première étant toujours moindre que la seconde, la différence de ces variables peut devenir moindre que toute quantité donnée, ces deux variables tendront vers une limite commune, plus grande que toutes les valeurs de la première variable, et plus petite que toutes les valeurs de la seconde. Cette limite pourra être déterminée, au moyen des valeurs de ces deux variables, avec une erreur moindre que la différence de ces valeurs respectives, et par suite infiniment petite.

Ce mode de détermination indirecte d'une constante inconnue revient à *exclure* tout ce qui n'est pas la valeur cherchée. C'est là le principe de la méthode d'*exhaustion* des anciens géomètres.

164. Une variable de signe constant ne peut pas tendre vers une

limite de signe différent. Soit, par exemple, u une variable constamment positive; si l'on avait

$$\lim u = -a$$

$-a$ étant < 0, il faudrait que la différence $u - (-a) = u + a$ fût infiniment petite, ce qui est impossible, puisqu'on a la somme de deux quantités positives, dont l'une est constante et différente de zéro; donc $\lim u$ ne peut être une quantité négative.

On verrait de même qu'une variable constamment négative ne peut avoir une limite positive.

165. Lorsque deux quantités finies différeront entre elles d'un infiniment petit, nous dirons qu'il existe entre ces deux quantités une *égalité imparfaite*.

Principe des limites. — Si deux variables u, v sont liées de telle sorte que leurs valeurs correspondantes soient constamment *égales*, ou du moins *infiniment peu différentes*, si de plus l'une de ces variables tend vers une certaine limite, l'autre variable tendra vers une limite rigoureusement égale à la première.

En effet, si l'on a l'égalité, rigoureuse ou imparfaite,

$$u = v,$$

qui équivaut à

$$u = v + \delta,$$

δ étant nul ou infiniment petit; si de plus u tend vers la limite a, ce qui donne

$$u = a + \varepsilon,$$

ε étant un autre infiniment petit, on en conclut

$$v - a = \varepsilon - \delta.$$

Le second membre étant infiniment petit, le premier doit l'être aussi. Donc v a aussi pour limite a. Donc l'équation rigoureuse ou imparfaite

$$u = v$$

conduit à l'équation rigoureuse

$$\lim u = \lim v.$$

166. On voit par là qu'une égalité rigoureuse ou imparfaite entre deux variables entraîne l'égalité rigoureuse des deux constantes qui sont les limites de ces variables, et qui ne font pas généralement partie de la série de leurs valeurs. Ce procédé de détermination indirecte de la limite d'une variable au moyen de la limite d'une autre variable revient à la méthode d'exhaustion dont nous parlions tout à l'heure.

On est forcé de recourir à ce procédé, toutes les fois que la valeur cherchée ne peut s'obtenir par une substitution directe. On demande, par exemple, quelle valeur prend la fonction $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ pour $x = a$, sachant que cette fonction doit rester continue dans le voisinage de la valeur a de la variable. On ne peut ici faire directement $x = a$, puisque pour cette valeur l'expression proposée n'offre plus aucun sens; mais on remarquera que la fonction $x + a$ est constamment identique à la proposée, pour toute valeur de x autre que a, et que la limite de cette fonction peut s'obtenir par substitution directe. On a donc

$$\lim \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim x + a = 2a.$$

Dans ce cas et dans les cas analogues, la valeur de la fonction est uniquement déterminée par la condition de continuité, en vertu de laquelle cette valeur doit être la limite des valeurs infiniment voisines.

167. Nous sommes maintenant en état de justifier les considérations que nous avons exposées au n° 40 sur l'extension des règles de l'Arithmétique des nombres rationnels aux nombres incommensurables.

Étant donnée une grandeur incommensurable avec son unité, concevons une grandeur commensurable avec l'unité, et différant aussi peu que l'on voudra de la grandeur donnée. Cette grandeur commensurable sera une variable, ayant pour limite la grandeur incommensurable, et susceptible, d'autre part, d'une évaluation numérique. Le nombre fractionnaire qui la représentera exprimera une valeur *indéfiniment approchée* de la grandeur incommensurable. C'est ce nombre variable que l'on substituera à la grandeur

concrète incommensurable, lorsque l'on voudra transformer une relation concrète en une relation entre des nombres abstraits.

Si deux grandeurs incommensurables avec l'unité sont représentées par la même suite de nombres avec une approximation indéfinie, les grandeurs commensurables variables, que ces nombres représentent rigoureusement, sont égales de part et d'autre; donc, en vertu du principe énoncé dans le numéro précédent, les limites, c'est-à-dire les grandeurs incommensurables, sont égales entre elles.

Pour représenter ce nombre rationnel variable qui exprime la valeur indéfiniment approchée d'une grandeur incommensurable, on emploie un symbole qui rappelle les opérations concrètes qu'il faut exécuter pour obtenir cette grandeur. Ainsi la valeur variable de la fraction qui exprime approximativement la diagonale d'un carré de côté $= 1$ sera représentée par $\sqrt{2}$, symbole qui rappelle que cette diagonale est le côté d'un carré double du premier en surface. On appelle un tel symbole, pour abréger, un *nombre incommensurable*.

168. Soit donnée maintenant une relation entre des grandeurs incommensurables. Il en résulte immédiatement une relation indéfiniment approchée entre les grandeurs commensurables dont les grandeurs incommensurables sont les limites. Cette relation étant traduite en nombres, on pourra lui faire subir toutes les transformations conformes aux règles de l'analyse abstraite, et l'on parviendra ainsi à une relation numérique différente de la première, et, comme elle, indéfiniment approchée. En repassant actuellement aux grandeurs concrètes, on aura une relation indéfiniment approchée entre les grandeurs commensurables, et, en substituant à celles-ci leurs limites incommensurables, on obtiendra finalement une relation rigoureuse entre ces limites.

Cette relation est précisément celle à laquelle on serait arrivé, si l'on avait remplacé d'abord les grandeurs incommensurables par les symboles numériques correspondants et traité ces symboles comme de véritables nombres, puis que dans le résultat final on eût remis à la place de ces symboles les quantités concrètes qu'ils représentent.

Telle est la base sur laquelle reposent toutes les applications du calcul aux grandeurs continues, et en particulier l'usage des con-

sidérations arithmétiques dans les démonstrations de la Géométrie élémentaire.

169. Éclaircissons ce qui précède, en prenant pour exemple la proposition fondamentale de la théorie des lignes proportionnelles.

Considérons les quatre segments OA, AB, OC, CD (*fig.* 10), déterminés sur les côtés d'un angle BOD par deux droites parallèles AC, BD. Si OA et AB sont commensurables entre eux, OC et CD le seront aussi entre eux, et l'on aura la proportion

$$1 \qquad OA : AB = OC : CD.$$

Réciproquement, si les segments sont commensurables deux à deux, et que l'on ait cette proportion, les droites AC et BD seront parallèles.

Si OA et AB sont incommensurables, soit p un sous-multiple quelconque de OA, et q le sous-multiple correspondant de OC. Si AC est parallèle à BD, on démontre que, AB étant compris entre deux multiples consécutifs de p, CD sera compris entre les mêmes multiples de q. On peut donc, en prenant p et q assez petits, trouver des segments AB′, CD′, respectivement commensurables avec OA et OC, et aussi peu différents de AB et de CD que l'on voudra, entre lesquels on aura la proportion

$$2) \qquad OA : AB' = OC : CD'.$$

Le rapport OA : AB′ de OA à une ligne aussi voisine que l'on voudra de AB est appelé, pour abréger, une *valeur approchée du rapport de* OA *à* AB. Lorsque les valeurs indéfiniment approchées de deux *rapports incommensurables* OA : AB et OC : CD sont égales, on dit que ces deux rapports incommensurables sont eux-

mêmes *égaux*, et on l'exprime en écrivant la proportion (1), qui équivaut à l'ensemble des proportions (2) à termes variables.

Réciproquement, si l'on a la proportion (1), c'est-à-dire l'ensemble des proportions (2), on en conclut que la ligne variable B′D′ est parallèle à AC, et l'angle OB′D′ = OAC. Donc l'angle OBD, limite de OB′D′, est égal à OAC, et de la proportion (1) résulte le parallélisme des lignes AC et BD.

La même conclusion serait vraie, si, au lieu d'être rigoureusement égaux, les deux rapports OA : AB′, OC : CD′ étaient seulement infiniment peu différents; car, en désignant par CD″ la quatrième proportionnelle exacte aux lignes OA, AB′, OC, cette ligne CD″ différerait infiniment peu de CD′ et par suite de CD, et la ligne B′D′ aurait, aussi bien que B′D″, pour limite la ligne BD parallèle à AC.

Jusqu'ici nous avons introduit dans notre relation (1) les quantités concrètes elles-mêmes. Pour pouvoir appliquer à cette proportion les diverses transformations qu'enseigne l'Arithmétique, il faut y remplacer les quatre termes concrets par quatre termes numériques, ce qui ne peut en général se faire exactement. Supposons que ces quatre termes soient mesurés, à une certaine fraction de l'unité près, par des nombres correspondants aux segments commensurables OA_1, AB_1, OC_1, CD_1. On voit aisément que les lignes A_1C_1, B_1D_1 ont pour limites AC, BD, et, par suite, leurs directions ne s'écartent qu'infiniment peu du parallélisme; de sorte que B_1D_1 s'écarte infiniment peu d'une parallèle B_1D_1 à A_1C_1. On en conclut que les rapports $OA_1 : AB_1$, $OC_1 : CD_1$ diffèrent entre eux infiniment peu, ce qui établit entre les limites des quatre termes la relation symbolique (1).

Réciproquement, la relation (1) équivaut à dire que les rapports $OA_1 : AB_1$, $OC_1 : CD_1$ sont infiniment peu différents; donc B_1D_1 s'écarte infiniment peu d'une parallèle à A_1C_1, et par suite les limites de ces deux lignes, BD et AC, sont rigoureusement parallèles.

La proportion (1) pouvant maintenant être regardée comme une égalité, exacte ou approchée, entre deux rapports de fractions $OA_1 : AB_1$ et $OC_1 : CD_1$, on en tire, par les règles de l'Arithmétique, les égalités exactes ou indéfiniment approchées

$$OA_1 \times CD_1 = OC_1 \times AB_1,$$

$$OA_1 : OC_1 = AB_1 : CD_1.$$

où les symboles de lignes représentent les fractions qui mesurent ces lignes. De ces relations numériques, exactes ou approchées, résultent des relations géométriques, exactes ou approchées, entre les valeurs commensurables qui correspondent aux fractions arithmétiques. Ainsi le rectangle construit sur $OA_{,}$ et $CD_{,}$ (*fig.* 11) sera

Fig. 11.

équivalent, du moins à un infiniment petit près, au rectangle construit sur $OC_{,}$ et $AB_{,}$, et par suite les limites de ces deux rectangles seront rigoureusement équivalentes. De même, si l'on porte sur OA la longueur $Ac = OC$, et sur OD les longueurs $Ob = AB$, $bd = CD$, les lignes Ab, cd seront parallèles.

Ces conséquences sont précisément celles qu'on aurait tirées de la proportion (1) en y remplaçant les segments par les *nombres incommensurables* correspondants, et étendant à ces nombres les règles établies pour les nombres proprement dits. Mais c'est seulement en vertu du principe des limites que cette extension devient légitime.

170. On voit par cet exemple comment une équation inexacte, mais dont l'erreur est infiniment petite, peut être traitée de la même manière et servir aux mêmes usages qu'une équation rigoureuse, l'erreur commise ayant pour limite zéro, et disparaissant par conséquent, lorsque aux valeurs variables approchées on substitue leurs limites respectives.

C'est sur l'usage de semblables équations, appelées par nous *équations imparfaites* [**164**], qu'est fondé le Calcul infinitésimal. Mais on voit qu'elles se présentent déjà dans les parties les plus élémentaires des Mathématiques, toutes les fois que l'on veut soumettre au calcul numérique les grandeurs continues.

On emploie, en général, les équations imparfaites lorsqu'il s'agit de déterminer une quantité *indirectement*, comme limite d'une variable. En établissant les relations qui doivent faire connaître cette variable, on peut, si on le juge à propos, commettre une erreur volontaire, pourvu que cette erreur soit infiniment petite, condition nécessaire et suffisante pour qu'elle disparaisse lorsqu'on passera de la relation entre des variables à la relation analogue entre leurs limites. Il n'est pas nécessaire de savoir calculer cette erreur : il suffit de pouvoir s'assurer qu'elle est infiniment petite.

La substitution d'une équation imparfaite à une équation rigoureuse revient, en définitive, à négliger d'écrire des quantités dont la considération est inutile pour le but que l'on se propose. C'est comme si l'on remplaçait ces quantités par des points ou par un *etc.*

§ II.

DE LA CONTINUITÉ DES VARIABLES ET DES FONCTIONS.

171. Une variable est *discontinue* dans le voisinage d'une valeur donnée, lorsqu'elle ne peut pas prendre toutes les valeurs aussi voisines que l'on voudra de cette valeur donnée.

Ainsi une quantité discrète indéterminée est une variable discontinue, puisqu'elle ne peut pas prendre de valeurs autres que des valeurs entières. Une fraction décimale périodique, telle que 0,333...3, varie suivant le nombre des chiffres, mais ne peut pas prendre une valeur telle que 0,31, intermédiaire entre les valeurs possibles 0,3 et 0,33. Il en est de même d'une fraction continue, ou de l'aire d'un polygone régulier d'un nombre de côtés variables, inscrit dans un cercle donné, etc.

172. Une variable est *continue* dans le voisinage d'une valeur donnée, lorsqu'elle peut recevoir une valeur quelconque parmi celles qui sont aussi voisines que l'on voudra de la valeur donnée.

Les longueurs, les aires, les volumes, les angles, les temps, les forces, etc., sont des variables continues.

La suite des nombres fractionnaires, ainsi que la suite des grandeurs commensurables avec l'unité, forment des variables qui ne

peuvent pas recevoir toutes les valeurs possibles voisines d'une valeur donnée. Néanmoins, ces variables pouvant prendre, comme les variables réellement continues, des valeurs aussi peu différentes que l'on voudra d'une valeur donnée, on a le droit, dans la plupart des cas, de les traiter comme des variables continues.

173. Une fonction $f(x)$ est dite *continue* dans le voisinage d'une valeur $x = a$ de la variable, lorsque, à un accroissement infiniment petit et de signe quelconque $x - a$ de la variable, correspond un accroissement infiniment petit $f(x) - f(a)$ de la fonction.

Ainsi, $f(x)$ étant continue dans le voisinage de a, on pourra toujours prendre, pour l'accroissement $x - a = h$ de la variable x à partir de a, une valeur numériquement assez petite $h = h_1$, telle que, pour cette valeur de h et *pour toute valeur numériquement moindre,* on satisfasse toujours à l'inégalité

$$f(a+h) - f(a) < \varepsilon,$$

l'inégalité étant relative aux seules valeurs absolues, et h pouvant être supposé indifféremment positif ou négatif.

Si la fonction $f(x)$ est continue dans le voisinage de $x = a$, on aura, pour ε infiniment petit,

$$f(a+h) - f(a) = \delta,$$

δ étant infiniment petit, et par suite

$$\lim_a f(a) + \varepsilon = \lim_a f(x) = f(a).$$

Donc, si x tend vers une limite dans le voisinage de laquelle $f(x)$ soit continue, on aura

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

174. Si la fonction $f(x)$ est continue dans le voisinage de toute valeur x comprise dans l'intervalle de deux valeurs données x_0 et X, c'est-à-dire telle que l'on ait (en supposant $x_0 < X$)

$$x_0 < x < X,$$

cette fonction sera dite *continue* dans l'intervalle de x_0 à X.

Il peut arriver que les limites elles-mêmes x_0, X soient ou ne

soient pas comprises dans cette définition. On devra indiquer lequel des deux cas a lieu, toutes les fois que la distinction sera nécessaire.

175. Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ est continue pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X, $f(x)$ prendra, pour une au moins de ces valeurs, une valeur égale à une quantité quelconque C comprise entre $f(x_0)$ et $f(X)$.*

En remplaçant $f(x)$ par $f(x) + C$, on pourra encore énoncer ce théorème de cette manière :

Si les deux valeurs $f(x_0)$ et $f(X)$ sont de signe contraire, $f(x)$ s'annulera au moins une fois, lorsque x passera d'une manière continue de la valeur x_0 à la valeur X.

Décomposons l'intervalle $X - x_0$ en intervalles partiels

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad x_{p+1} - x_p, \quad \ldots,$$

tous égaux ou inférieurs à $\frac{1}{m}(X - x_0)$, m étant un nombre entier quelconque. Puisque, pour x variant de x_0 à X, $f(x)$ change de signe, en passant, par exemple, du négatif au positif, ce changement de signe devra se produire au moins une fois entre deux termes consécutifs de la série

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(X).$$

Soient $x_p = x'_0$ et $x_{p+1} = X'_0$ deux valeurs consécutives de x, pour lesquelles $f(x'_0)$ est de même signe que $f(x_0)$, et $f(X')$ de même signe que $f(X)$.

Partageons de même l'intervalle $X' - x'_0$ en parties toutes $\leqq \frac{1}{m}(X' - x'_0)$, et soient $f(x''_0)$, $f(X'')$ deux valeurs consécutives de $f(x)$ respectivement de mêmes signes que $f(x'_0)$, $f(X')$.

En continuant de la même manière, on formera une double suite de valeurs

$$\begin{array}{llll} f(x_0), & f(x'_0), & f(x''_0), & \ldots \\ f(X), & f(X'), & f(X''), & \ldots, \end{array}$$

qui correspondront deux à deux à des valeurs x_0 et X, x'_0 et X',

x''_0 et X'', ..., différant entre elles de quantités inférieures ou au plus égales aux termes de la progression géométrique décroissante

$$X - x_0, \quad \frac{1}{m}(X - x_0), \quad \frac{1}{m^2}(X - x_0), \quad \ldots$$

Or les deux suites

$$x_0, \quad x'_0, \quad x''_0, \quad \ldots$$
$$X, \quad X', \quad X'', \quad \ldots$$

l'une croissante, l'autre décroissante, représentent des quantités qui vont en se rapprochant les unes des autres,

$$x_0 \quad x''_0 \quad x'_0 \quad x_0 \quad \ldots \quad X' \quad X'' \quad X$$

de telle sorte que chaque couple $x_0^{(k)}$, $X^{(k)}$ soit compris dans l'intervalle du couple précédent $x_0^{(k-1)}$, $X^{(k-1)}$. Il est donc clair [163] que ces valeurs tendent vers une limite commune a, infiniment peu différente tant de $x_0^{(k)}$ que de $X^{(k)}$. Donc $f(a)$ différera infiniment peu tant de $f(x_0^{(k)})$ que de $f(X^{(k)})$. Or l'une de ces dernières quantités est positive, l'autre négative; donc [164] $f(a)$ ne peut être ni négative ni positive, sans quoi l'une des variables $f(x_0^{(k)})$, $f(X^{(k)})$ tendrait vers une limite de signe différent du sien; donc $f(a)$ ne peut être que zéro, et par suite l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine comprise entre x_0 et X.

Il résulte de là que, si C est compris entre $f(x_0)$ et $f(X)$, c'est-à-dire si les deux valeurs $f(x_0) - C$ et $f(X) - C$ sont de signe contraire, l'équation $f(x) - C = 0$ aura au moins une racine comprise entre x_0 et X, et par conséquent $f(x)$ passera au moins une fois par la valeur C.

175. Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle de x_0 à X (fig. 12). Si l'on peut établir que, dans toute portion $x'' - x'$ de l'intervalle $X - x_0$, la fonction $f(x)$ satisfait au moins une fois à la double inégalité*

$$A \leqq f(x) \leqq B.$$

A et B étant deux constantes données, elle y satisfera aussi pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle de x_0 à X.

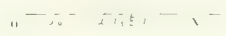
Supposons, en effet, qu'elle n'y satisfasse pas pour $x = \xi$, et

que l'on ait, par exemple, $f(\xi) > B$. En prenant pour x' et x'' deux valeurs, l'une plus petite, l'autre plus grande que ξ, il existera, par hypothèse, entre x' et x'', une valeur x_1, telle que l'on ait

$$A < f(x_1) < B.$$

La différence $f(\xi) - f(x_1)$ sera alors $> f(\xi) - B$. Or, en resserrant suffisamment de part et d'autre de ξ l'intervalle $x'' - x'$, la

Fig. 12.



différence entre ξ et x_1, compris l'un et l'autre dans cet intervalle, deviendra aussi petite que l'on voudra. Par suite, la fonction $f(x)$ étant supposée continue, la différence $f(\xi) - f(x_1)$ devra être aussi infiniment petite, ce qui ne saurait évidemment avoir lieu si la valeur constante $f(\xi)$ était $> B$ et la valeur variable $f(x_1)$ toujours $\leq B$; donc il ne peut exister entre x_0 et X aucune valeur de x pour laquelle les inégalités (1) ne soient pas satisfaites.

176. Lorsqu'une fonction dépend d'une variable discontinue, il n'y a pas lieu, naturellement, à parler de sa continuité. Ainsi, une fraction décimale périodique, considérée comme fonction du nombre de ses chiffres; la somme des termes d'une série, considérée comme fonction du nombre de ces termes; le périmètre et l'aire d'un polygone régulier d'un nombre variable de côtés, inscrit dans un cercle donné, sont des fonctions essentiellement discontinues.

Une fonction d'une variable continue peut devenir discontinue dans le voisinage de certaines valeurs de la variable, lorsqu'à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement fini ou infini de la fonction. Ainsi la fonction $\sin\frac{\pi}{x}$ est discontinue dans le voisinage de $x = 0$; car, si n désigne un nombre aussi grand que l'on voudra, et que l'on donne à x successivement les valeurs $\frac{2}{n}$, $\frac{2}{n+1}$, dont la différence pourra de-

venir moindre que toute quantité donnée, la différence des valeurs correspondantes de $\sin\frac{\pi}{x}$ sera la quantité finie ± 1. La fonction $e^{\frac{1}{x-a}}$ est discontinue dans le voisinage de $x = a$; car, h étant un infiniment petit positif, $e^{\frac{1}{-h}}$ est infiniment petit pour $x = a - h$, infiniment grand pour $x = a + h$, et, par suite, cette fonction éprouve un accroissement infiniment grand, tandis que la variable varie de la quantité infiniment petite $2h$.

177. Il peut arriver que, pour une certaine valeur de la variable, la fonction cesse d'exister, après avoir pris, dans le voisinage de cette valeur, des valeurs aussi grandes que l'on voudra. On dit alors que la fonction devient *infinie* pour cette valeur de la variable, et cette dernière valeur s'appelle un *infini* de la fonction, de même qu'on appelle *zéro* d'une fonction une valeur de la variable pour laquelle cette fonction s'annule. Ainsi la fonction $\frac{1}{x-a}$ est infinie pour $x = a$; la fonction $\operatorname{tang} x$ est infinie pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, etc.

Lorsqu'une fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, il peut se présenter deux cas : ou bien les deux quantités $f(a - \varepsilon)$, $f(a + \varepsilon)$ prendront l'une et l'autre des valeurs aussi grandes que l'on voudra pour ε suffisamment petit; ou bien une seule de ces quantités pourra croître indéfiniment, l'autre tendant vers une limite finie.

Dans le premier cas, qui est celui des fonctions algébriques, les quantités $\frac{1}{f(a-\varepsilon)}$ et $\frac{1}{f(a+\varepsilon)}$ sont l'une et l'autre infiniment petites en même temps que ε, et leur limite commune, que nous représenterons par $\frac{1}{f(a)}$, est égale à zéro. Ainsi l'*infini* $x = a$ de la fonction $f(x)$ est un *zéro* de l'inverse $\frac{1}{f(x)}$ de cette fonction, et $\frac{1}{f(x)}$ varie d'une manière continue dans le voisinage de $x = a$. On dit, dans ce cas, que $f(x)$ a, pour la valeur $x = a$, une *discontinuité de première espèce* ou un *infini* proprement dit.

Dans le second cas, qui est celui de la fonction $e^{\frac{1}{x-a}}$ pour $x = a$, une seule des quantités $\frac{1}{f(a-\varepsilon)}$, $\frac{1}{f(a+\varepsilon)}$ tend vers zéro, l'autre ayant une limite différente de zéro, et qui peut même, comme dans l'exemple de $e^{\frac{1}{x-a}}$, être infinie. Alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est, aussi bien que $f(x)$, discontinue pour $x = a$. On dit dans ce cas que la fonction $f(x)$ a, pour la valeur $x = a$, une *discontinuité de seconde espèce* ou une *discontinuité* prôprement dite. Cette dénomination s'applique aussi au cas où, pour $x = a$, $f(x)$ passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie.

Pour les valeurs de la variable qui rendent la fonction infinie ou discontinue, les propriétés de la fonction sont altérées, non-seulement les propriétés qui se rapportent aux valeurs de la fonction voisines de cette discontinuité, mais encore celles qui sont relatives à un intervalle fini comprenant la valeur de discontinuité. Il en est de même des valeurs de la variable pour lesquelles la fonction devient indéterminée, comme la valeur zéro de x dans la fonction $\sin\frac{\pi}{x}$, et aussi des valeurs qui font coïncider plusieurs déterminations de la fonction, distinctes pour toute autre valeur de x. Cela peut encore avoir lieu pour les valeurs qui, tout en laissant la fonction déterminée et continue, sont formées avec des fonctions qui deviennent indéterminées, comme c'est le cas de la fonction $x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ pour $x = 0$. L'indétermination, quoique disparaissant dans la fonction elle-même, peut reparaître par suite de certaines opérations exécutées sur la fonction; ainsi la dérivée de $x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ est indéterminée pour $x = 0$.

Toutes ces valeurs de la variable, qui mettent en défaut la plupart des théorèmes généraux relatifs aux fonctions continues, se nomment des *valeurs singulières* ou *valeurs critiques*. Nous les exclurons toujours dans l'énoncé et la démonstration des propositions fondamentales, et nous supposerons constamment que, dans l'intervalle qui comprend les valeurs considérées de la variable, les limites incluses, il n'existe aucune valeur singulière de cette variable.

178. Une fonction $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables $x, y, \ldots$ est dite *continue* dans le voisinage d'un système de valeurs

$$x = a, \quad y = b, \quad \ldots$$

de ces variables, si l'accroissement $f(a+\delta, b+\varepsilon, \ldots) - f(a, b, \ldots)$ de la fonction, correspondant aux accroissements $\delta, \varepsilon, \ldots$ donnés aux variables à partir des valeurs $a, b, \ldots$, est infiniment petit toutes les fois que $\delta, \varepsilon, \ldots$ sont tous infiniment petits.

Dans ce cas, si l'on fait tendre $x, y, \ldots$ vers les limites respectives $a, b, \ldots$, on aura, comme au n° 173,

$$\lim f(x, y, \ldots) = f(\lim x, \lim y, \ldots).$$

Exemples. — I. La somme $x + y + z$ étant une fonction continue des variables x, y, z, dans le voisinage de valeurs quelconques de ces variables, on a, d'après ce qu'on vient de démontrer,

$$\lim(x + y + z) = \lim x + \lim y + \lim z.$$

II. Le produit xy peut s'écrire

$$xy = (a + \delta)(b + \varepsilon) = ab + a\varepsilon + b\delta + \varepsilon\delta,$$

quantité qui diffère infiniment peu de ab; donc

$$\lim(xy) = \lim x . \lim y.$$

III. Le quotient

$$\frac{x}{y} = \frac{a + \delta}{b + \varepsilon} = \frac{a}{b} + \frac{b\delta - a\varepsilon}{b(b + \varepsilon)}$$

diffère infiniment peu de $\frac{a}{b}$, tant que b n'est pas nul. Donc on a toujours, tant que $\lim y$ diffère de zéro,

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

IV. On a, pour m entier et positif,

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + \ldots + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1})$$

quantité infiniment petite en même temps que $x - a$; donc

$$\lim x^m = (\lim x)^m.$$

V. Si b est un nombre positif quelconque, on a

$$b^{\lambda} - b^{0} = b^{0}(b^{\lambda} - 1) = b^{0}(b^{\lambda} - 1).$$

Le facteur $b^{\lambda} - 1$ étant infiniment petit en même temps que λ, on en conclut

$$\lim b^{\lambda} = b^{\lim \lambda}.$$

Tous les résultats que nous venons d'établir sont indépendants des liaisons qui peuvent exister entre les variables $x, y, \ldots$, pourvu que ces liaisons n'empêchent pas les accroissements d'être infiniment petits tous à la fois.

179. Lorsque $f(x, y, \ldots)$ cesse d'avoir une valeur déterminée pour les valeurs $a, b, \ldots$, attribuées aux variables $x, y, \ldots$, alors l'expression $f(a, b, \ldots)$ ou $f(\lim x, \lim y, \ldots)$ n'a plus de sens par elle-même, et on ne l'emploie que comme abréviation pour désigner la limite de $f(x, y, \ldots)$ (si elle existe), c'est-à-dire que l'on pose, *comme définition,*

$$f(\lim x, \lim y, \ldots) = \lim f(x, y, \ldots).$$

C'est ainsi que l'on prend, comme nous l'avons vu [166], pour valeur de la fonction $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ correspondante à $x = a$, la limite vers laquelle tend cette fonction lorsque x tend vers a.

La raison qui fait prendre cette valeur plutôt que toute autre pour combler la lacune qui existe dans la suite des valeurs de $f(x, y, \ldots)$ est fondée sur la loi de continuité, à laquelle on suppose que cette fonction doit satisfaire. On donne à cette valeur-limite le nom de *vraie valeur* de la fonction pour le système des valeurs $x = a, y = b, \ldots$.

180. Parmi les fonctions dont les valeurs-limites se déterminent de cette manière, il faut remarquer le cas important du rapport de deux infiniment petits

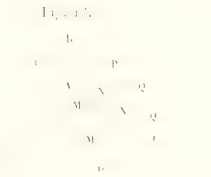
Lorsque deux variables infiniment petites sont fonctions d'une même troisième variable, leur rapport tend généralement vers une limite déterminée, lorsque les deux variables tendent simultanément vers zéro.

Exemples. — I. Soit ε un infiniment petit, et considérons le rapport des deux infiniment petits $\sqrt{1+\varepsilon}-1$ et ε. On a identiquement, quel que soit ε différent de zéro,

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{\varepsilon} = \frac{(\sqrt{1+\varepsilon}-1)(\sqrt{1+\varepsilon}+1)}{\varepsilon(\sqrt{1+\varepsilon}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}+1}.$$

Le dernier rapport devient égal à $\frac{1}{2}$ pour $\varepsilon = 0$, comme on le voit par la substitution directe. Donc la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{\varepsilon}$ est égale aussi à $\frac{1}{2}$.

II. Soit un angle fixe BAC (*fig.* 13), et, par un point fixe O, pris hors de cet angle, menons des droites, telles que OMN, ren-



contrant AB en un point M, qui s'approche indéfiniment du sommet A. Les segments AM, AN formés sur les deux côtés de l'angle sont deux infiniment petits, dont le rapport a pour valeur

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin ANM}{\sin AMN} = \frac{\sin ANQ}{\sin AMO}.$$

Or les angles ANQ, AMO ont pour limites respectives les angles constants C′AP, B′AO, de sorte que $\lim \sin ANQ = \sin C'AP$, $\lim \sin AMO = \sin B'AO$. Donc

$$\lim \frac{\sin ANQ}{\sin AMO} = \frac{\sin C'AP}{\sin B'AO} = k,$$

k étant un nombre déterminé; par conséquent, le rapport $\frac{AM}{AN}$ a aussi pour limite le nombre k.

§ III.

INFINIMENT PETITS DES DIVERS ORDRES.

181. Lorsque le rapport de deux infiniment petits tend vers une limite finie et différente de zéro, on dit que ces deux infiniment petits sont *de même ordre*. Tel est le cas des infiniment petits AM, AN, de l'exemple précédent, toutes les fois que le point O est extérieur à l'angle BAC.

Quand la limite du rapport est zéro ou l'infini, les deux infiniment petits sont dits, en général, des infiniment petits d'*ordres différents*. Ainsi, si le rapport $\frac{u}{v}$ est infiniment petit, c'est-à-dire, si sa limite est nulle, on dit que u est un infiniment petit d'*ordre supérieur à* v, ou que u est *infiniment petit par rapport à* v. On dit en même temps que v est infiniment petit d'ordre *inférieur* à u, ou, en d'autres termes, que v est *infiniment grand par rapport à* u. Cela revient au même que si l'on avait supposé $\frac{v}{u}$ infiniment grand, ou $\lim \frac{v}{u} = \infty$.

Soit, par exemple, un triangle rectangle ACB (*fig.* 14), dont

Fig. 14.

l'angle B est infiniment petit. Si l'on abaisse du sommet de l'angle droit C la perpendiculaire CD sur l'hypoténuse, le côté CA et la perpendiculaire CD seront l'un et l'autre infiniment petits. Or on a la proportion

$$DA : CA = CA : BA.$$

Donc le rapport $\frac{DA}{CA}$ des infiniment petits DA et CA est infiniment petit comme le rapport $\frac{CA}{AB}$, et par suite DA est non-seulement infiniment petit par lui-même, mais encore il est *infiniment*

petit par rapport à CA. De même, si l'on mène DE perpendiculaire à CA, le rapport $\frac{EA}{AD}$, égal à chacun des deux précédents, sera infiniment petit; par conséquent, EA sera infiniment petit *par rapport à* DA, et ainsi de suite.

Si l'on appelle infiniment petits *du premier ordre* ceux que l'on compare immédiatement aux quantités finies, les quantités qui seront infiniment petites du premier ordre *par rapport* aux infiniment petits du premier ordre, comme le segment DA par rapport à CA, seront dites des infiniment petits *du second ordre;* les quantités comme EA, infiniment petites du premier ordre *par rapport* aux infiniment petits du second ordre, seront dites des infiniment petits *du troisième ordre,* et ainsi de suite.

182. Nous avons appelé *infiniment grand* une variable pouvant prendre des valeurs aussi grandes que l'on voudra, de manière à pouvoir surpasser une grandeur donnée quelconque.

L'inverse $\frac{1}{\varepsilon}$ d'un infiniment petit ε est un infiniment grand; et réciproquement, l'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit.

On peut toujours remplacer le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ de deux infiniment petits par le rapport $\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)}$ des deux infiniment grands qui en sont les inverses, et *vice versa.*

Ce que nous venons de dire du classement des infiniment petits en divers ordres peut se répéter d'une manière toute semblable pour le classement des infiniment grands.

Par exemple, si le triangle DAE de la figure précédente est considéré comme ayant ses côtés DA, DE finis, DA étant constant et l'angle EDA infiniment petit, les côtés CA, CD du triangle CAD seront infiniment grands du premier ordre; les côtés BA, BC du triangle BAC seront infiniment grands du second ordre, etc.; et l'on voit comment on obtiendrait successivement des infiniment grands des ordres supérieurs.

183. Soit α un infiniment petit du premier ordre, pris pour

base d'un système d'infiniment petits. Une variable ω sera un infiniment petit du second ordre, lorsque le rapport $\frac{\omega}{\alpha}$ sera infiniment petit du premier ordre; ω sera infiniment petit du troisième ordre, lorsque $\frac{\omega}{\alpha}$ sera infiniment petit du second ordre, et ainsi de suite. Nous avons vu [181] des exemples de ces infiniment petits d'ordres différents.

Représentons généralement par k une quantité finie quelconque, abstraction faite de sa valeur. ω sera un infiniment petit du premier ordre, lorsqu'on aura

$$\lim \frac{\omega}{\alpha} = k.$$

On pourra poser alors, en supposant ε infiniment petit,

$$\frac{\omega}{\alpha} = k + \varepsilon,$$

ou simplement

$$\frac{\omega}{\alpha} = k,$$

en attribuant à k une valeur variable qui ne soit ni infiniment petite ni infiniment grande. Donc la forme générale des infiniment petits du premier ordre est

$$\omega = k\alpha.$$

Si le rapport $\frac{\omega}{\alpha}$ est un infiniment petit du premier ordre, de la forme $k\alpha$, la quantité

$$\omega - k\alpha$$

sera un infiniment petit du second ordre, et ainsi de suite.

En général, si le rapport $\frac{\omega}{\alpha^n}$ a une limite finie, la quantité

$$\omega - k\alpha$$

sera un infiniment petit du $n^{\text{ième}}$ ordre, quel que soit d'ailleurs le nombre n, entier, fractionnaire ou incommensurable.

184 La variable ω étant un infiniment petit d'ordre n et de la

forme $k\alpha^n$, on aura, en désignant par ε un nombre positif aussi petit que l'on voudra,

$$(1)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{\alpha}{\alpha^{n-\varepsilon}} = \lim \alpha^{\varepsilon} = 0, \\ \lim \dfrac{\alpha}{\alpha^{n+\varepsilon}} = \lim \alpha^{-\varepsilon} = \infty. \end{cases}$$

De plus, on voit aisément que ces conditions ne pourraient plus être remplies *toutes les deux à la fois*, si l'on remplaçait n par un nombre n' différent de n. Il suffirait, pour le faire voir, de prendre ε moindre que la différence $\pm(n'-n)$. Donc ces conditions ne peuvent convenir à d'autres infiniment petits de la forme $k\alpha^{n'}$ qu'à ceux pour lesquels on a $n'=n$.

185. Mais la forme $k\alpha^n$, k étant fini, n'est pas la seule forme d'infiniment petits qui satisfasse aux conditions (1). Si l'on considère, par exemple, les fonctions

$$\alpha^n \frac{\alpha}{\log\alpha}, \quad \alpha^n \alpha^{\alpha} \log\alpha,$$

on aura, pour la première,

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha^n} = \lim \frac{1}{\log\alpha} = 0,$$

et pour la seconde

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha^n} = \lim \log\alpha = \infty.$$

Néanmoins, comme nous le verrons par la suite [385], le produit $\alpha^{\varepsilon}\log\alpha$ étant infiniment petit, quel que soit $\varepsilon > 0$, ces deux fonctions satisferont, aussi bien que celles de la forme $k\alpha^n$, aux conditions (1), et, si l'on prend ces dernières pour définition générale des infiniment petits d'ordre n, ces deux fonctions devront être rapportées à cet ordre.

Il en serait de même de toutes les fonctions de la forme

$$\alpha^n \left(\frac{1}{\log\alpha}\right)^{\pm\alpha} \left(\frac{1}{\log\log\alpha}\right)^{\pm\alpha} \cdots$$

lesquelles, en vertu des conditions (1), auxquelles elles satisfont, devront être considérées comme des infiniment petits de l'ordre n, tant qu'on aura à les comparer seulement aux puissances de α.

186. La quantité $A = \frac{1}{\alpha}$, inverse d'un infiniment petit du premier ordre, est un *infiniment grand* du premier ordre, qui pourra servir de *base* à un système d'infiniment grands.

Une variable Ω sera un infiniment grand de l'ordre n, lorsque la limite du rapport $\frac{\Omega}{A^n}$ sera une quantité finie, ou plus généralement, lorsqu'on aura, quelque petit que soit le nombre positif ε, les deux conditions

$$\lim \frac{\Omega}{A^{n-\varepsilon}} = \infty, \quad \lim \frac{\Omega}{A^{n+\varepsilon}} = 0.$$

Un infiniment grand d'ordre n,

$$\Omega = kA^n = k\alpha^{-n},$$

peut être considéré comme un infiniment petit d'ordre négatif $-n$. On peut dire de même qu'un infiniment petit d'ordre n,

$$\omega = k\alpha^n = kA^{-n},$$

est un infiniment grand d'ordre $-n$, et qu'une quantité finie, ou plus généralement l'inverse d'un infiniment petit d'ordre zéro $\left(\text{tel que l'inverse de l'infiniment petit } \frac{1}{\log\alpha}, \text{ savoir, } \log\alpha\right)$, est, comme $\log A$, un infiniment grand de l'ordre zéro.

187. Dans certains cas, l'évaluation de l'ordre infinitésimal d'une quantité, fondée sur la comparaison avec les puissances positives ou négatives de α, est insuffisante. C'est ce qui peut arriver dans les cas exceptionnels où cette comparaison, fondée sur les formules (1), indique pour ω l'ordre n, quoique la limite du rapport $\frac{\omega}{\alpha^n}$ soit nulle ou infinie.

On introduit alors, à côté de la base a, la nouvelle base $\frac{1}{\log\alpha}$,

c'est-à-dire que l'on cherche pour quelle valeur de n' le rapport

$$\frac{\omega}{x^{n'}\log x}$$

aura une limite finie, ou du moins sera tel que l'on ait, pour ε positif et aussi petit que l'on voudra,

$$\lim_{x=0}\frac{\omega}{\log x}=0,\quad \lim_{x=\infty}\frac{\omega}{\log x}=\infty.$$

Dans le cas où le rapport $\frac{\omega}{\log x}$ est nul ou infini à la limite, quoique les deux conditions précédentes soient satisfaites, on introduira la nouvelle base $\frac{1}{\log\log x}$, et l'on cherchera une puissance n'' de cette base, telle que le rapport de ω au produit

$$x^{n'}\left(\frac{1}{\log x}\right)^{n''}\left(\frac{1}{\log\log x}\right)$$

soit fini, ou du moins devienne nul pour peu que l'on diminue n'', et infini pour peu qu'on l'augmente.

On pourra continuer ainsi jusqu'à ce que l'on ait mis la variable proposée sous la forme

$$\omega=kx^{n'}\left(\frac{1}{\log x}\right)^{n''}\left(\frac{1}{\log\log x}\right)^{n'''}\cdots$$

k étant une quantité dont la limite soit finie.

Dans d'autres cas, le rapport $\frac{\omega}{\alpha^n}$ est infiniment petit, quelque grand que soit l'exposant n : c'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'infiniment petit $e^{-\frac{1}{\alpha}}$, α étant un infiniment petit *positif*. On est conduit, dans ce cas, à considérer ω comme un infiniment petit d'ordre infini, tant qu'on ne le compare qu'aux puissances de α. Mais on peut établir pour ces nouveaux infiniment petits une classification analogue à celle que nous avons établie pour les infiniment petits d'ordre zéro; pour cela, on les comparera aux puissances de $e^{-\frac{1}{\alpha}}$, de $\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{e^{-\frac{1}{\alpha}}}$, et ainsi de suite.

188. Théorème I. — *Soient ω_n, $\omega_{n'}$, $\omega_{n''}$, ... des infiniment petits des ordres croissants*

$$n < n' < n'' < \ldots.$$

Leur somme

$$\omega_n + \omega_{n'} + \omega_{n''} + \ldots$$

sera un infiniment petit de l'ordre le moins élevé n.

Car, si ε est un nombre positif quelconque, moindre que la différence $n' - n$, on aura

$$\lim \frac{\omega_n + \omega_{n'} + \omega_{n''} + \ldots}{\alpha^{n+\varepsilon}} = 0, \quad \lim \frac{\omega_n + \omega_{n'} + \omega_{n''} + \ldots}{\alpha^{n-\varepsilon}} = \infty.$$

Il existe un théorème analogue pour une somme d'infiniment grands de divers ordres : cette somme est un infiniment grand de l'ordre *le plus élevé*. Cet énoncé est d'ailleurs compris dans le précédent, quand on considère les infiniment grands comme des infiniment petits d'ordre négatif.

189. Théorème II. — *Le produit de deux infiniment petits ω_n, $\omega_{n'}$, d'ordres n et n', est un infiniment petit d'ordre $n + n'$.*

On a, en effet, pour n et n' positifs, ainsi que ε, ε', ε'',

$$\lim \frac{\omega_n}{\alpha^{n+\varepsilon}} \cdot \frac{\omega_{n'}}{\alpha^{n'+\varepsilon'}} = \lim \frac{\omega_n \omega_{n'}}{\alpha^{n+n'+\varepsilon''}} = 0,$$

$$\lim \frac{\omega_n}{\alpha^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{\omega_{n'}}{\alpha^{n'-\varepsilon'}} = \lim \frac{\omega_n \omega_{n'}}{\alpha^{n+n'-\varepsilon''}} = \infty.$$

On verrait de même que $\frac{\omega_n}{\omega_{n'}}$ est un infiniment petit d'ordre $n - n'$, ou un infiniment grand d'ordre $n' - n$; et que $\frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\omega_{n'}}$ est un infiniment grand d'ordre $n + n'$, ou un infiniment petit d'ordre $-n - n'$.

Il résulte de là que le théorème énoncé est vrai, quels que soient les ordres, positifs ou négatifs, des infiniment petits.

On en conclut encore que, si l'on élève un infiniment petit ω_n, d'ordre quelconque n, à une puissance quelconque m, on obtiendra un infiniment petit $(\omega_n)^m$ d'ordre mn, quels que soient les signes de m et de n.

190. THÉORÈME III. — *Si ζ est un infiniment petit d'ordre m par rapport à x, et γ un infiniment petit d'ordre n par rapport à ζ, γ sera un infiniment petit d'ordre mn par rapport à x.*

En effet, on a, en supposant d'abord m et n positifs,

$$\lim \frac{\zeta}{x^m} = 0, \quad \lim \frac{\gamma}{\zeta^n} = \infty.$$

d'où

$$\lim \left(\frac{\zeta}{x^m}\right)^n \frac{\gamma}{\zeta^n} = \lim \frac{\gamma}{x^{mn}} = 0,$$

et de même

$$\lim \frac{\gamma}{x^{mn}} = \infty.$$

On traiterait de même les cas où m et n auraient des signes quelconques.

§ IV.

THÉORÈMES SUR LA SUBSTITUTION DES INFINIMENT PETITS LES UNS AUX AUTRES DANS LA RECHERCHE DES LIMITES DE RAPPORTS OU DE SOMMES.

191. Lorsque le rapport de deux quantités variables (finies, infiniment petites ou infiniment grandes) a pour limite l'*unité*, la différence de ces deux quantités sera *infiniment petite par rapport à chacune d'elles;* ou, comme nous dirons d'une manière abrégée, les deux quantités *différeront* l'une de l'autre *infiniment peu,* en entendant bien une fois pour toutes que, dans cette locution abréviative, il n'est question que du rapport de la différence à chacun de ses deux termes.

Soit, en effet,

$$\lim \frac{u}{v} = 1.$$

Cela équivaut à poser

$$\frac{u}{v} = 1 + \delta,$$

δ étant infiniment petit. On en tire

$$\frac{u - v}{v} = \delta,$$

et par suite la différence $u - v$ est *infiniment petite par rapport à* v. On a ensuite

$$\frac{u-v}{u} = \frac{v}{u}\,\frac{u-v}{v} = \frac{1}{\left(\frac{u}{v}\right)}\,\delta;$$

$\frac{u}{v}$ ayant pour limite l'unité, $\delta : \frac{u}{v}$ sera infiniment petit. Donc $u - v$ est encore *infiniment petit par rapport à* u.

192. Réciproquement, si la différence de deux quantités variables (finies, infiniment petites ou infiniment grandes) *est infiniment petite par rapport* à l'une d'elles, le rapport des deux quantités aura pour limite l'unité, et leur différence sera aussi infiniment petite par rapport à l'autre.

En effet, si la différence

$$u - v = z$$

est infiniment petite par rapport à v, de sorte que $\frac{z}{v}$ soit infiniment petit, comme on a

$$\frac{u}{v} - 1 = \frac{z}{v},$$

il s'ensuit de là que

$$\lim \frac{u}{v} = 1;$$

par conséquent aussi

$$\frac{u-v}{u} = \frac{z}{\left(\frac{u}{v}\right)}$$

est infiniment petit; donc $u - v$ est infiniment petit *par rapport à* u.

193. *Principe de la substitution des infiniment petits.* — Dans le cas que nous venons de considérer, les deux quantités u et v sont égales entre elles, à une différence près infiniment petite par rapport à chacune d'elles. Si l'on fait abstraction de cette différence, l'équation obtenue en les égalant,

$$u = v,$$

s'appelle une *équation imparfaite*. Cette équation, considérée en elle-même, est inexacte. Mais si les variables u, v ne sont que des auxiliaires que l'on emploie dans la recherche des limites de certaines quantités, l'équation imparfaite pourra rendre les mêmes services qu'une équation exacte, puisque les limites de deux grandeurs sont égales lorsque ces grandeurs *diffèrent entre elles infiniment peu*.

Les équations entre quantités infiniment petites ou infiniment grandes que nous rencontrerons seront, en général, des équations imparfaites.

Nous allons maintenant établir les deux principes fondamentaux du Calcul infinitésimal, qui servent de base l'un au *Calcul différentiel*, l'autre au *Calcul intégral*, et qui contiennent les règles de la *substitution des infiniment petits*.

194. *Premier principe fondamental.* — La limite du rapport de deux variables ne change pas, lorsqu'on remplace chacune d'elles par une autre variable qui *en diffère infiniment peu* [191].

Supposons que u' et v' soient deux variables telles que l'on ait

$$\lim \frac{u}{u'} = 1, \quad \lim \frac{v}{v'} = 1.$$

De l'identité

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \cdot \frac{u}{u'} \cdot \frac{v'}{v}$$

on tire

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{u'}{v'} \cdot \lim \frac{u}{u'} \cdot \lim \frac{v'}{v} = \lim \frac{u'}{v'}.$$

Exemple. — Soit proposé de déterminer la tangente en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. On fixera cette tangente au moyen de l'angle qu'elle fait avec le prolongement du rayon vecteur, lequel angle est la limite de l'angle BAC (*fig.* 15), que fait ce prolongement avec la corde infiniment petite AB. Si l'on mène AD perpendiculaire sur OB, on aura

$$\text{DBA} = \text{BAC} - \text{BOA},$$

d'où

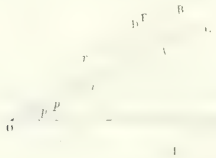
$$\lim \frac{\text{DBA}}{\text{BAC}} = 1,$$

puisque BOA est infiniment petit. Ensuite, en décrivant du centre O l'arc de cercle EAF, qui rencontre de nouveau la direction EO en E′, on a

$$ED : DA = DA : 2OA = ED,$$

d'où il résulte que le rapport ED : DA est infiniment petit. Donc DE est infiniment petit *par rapport* à DB et à $EB = r' - r$. Enfin EA

Fig. 15.



diffère infiniment peu de DA, puisque la limite du rapport d'un arc infiniment petit à son sinus est l'unité. Donc, puisque la fonction tang x est continue, on a

$$\lim \operatorname{tang} BAC = \lim \operatorname{tang} DBA = \lim \frac{DA}{DB} = \lim \frac{EA}{EB} = \lim \frac{r\,p'}{r' - r} = p.$$

195. *Second principe fondamental.* — On peut décomposer une quantité finie en un nombre infiniment grand de parties infiniment petites, de sorte qu'une somme composée d'un nombre infiniment grand de parties infiniment petites peut avoir une limite finie.

Dans la recherche de la limite d'une somme de quantités infiniment petites, *on peut, sans altérer cette limite, remplacer chaque élément de la somme par une quantité qui en* DIFFÈRE INFINIMENT PEU.

Soit, en effet,

$$\Sigma u = u + u' + u'' + \ldots$$

une somme d'éléments infiniment petits, et soient v, v', v'', ... d'autres éléments, correspondants aux premiers, et tels que l'on ait

$$\lim \frac{v}{u} = 1, \quad \lim \frac{v'}{u'} = 1, \quad \lim \frac{v''}{u''} = 1, \quad \ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{v}{u} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{v'}{u'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{v''}{u''} = 1 + \varepsilon'', \quad \ldots$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ étant infiniment petits en même temps que les éléments des deux suites. On pourra écrire

$$v = u(1 + \varepsilon), \quad v' = u'(1 + \varepsilon'), \quad v'' = u''(1 + \varepsilon''), \quad \ldots$$

d'où

$$v + v' + v'' + \ldots = u + u' + u'' + \ldots + u\varepsilon + u'\varepsilon' + u''\varepsilon'' + \ldots$$

Or, d'après un théorème connu d'Algèbre élémentaire, si dans une somme de produits

$$ab + a'b' + a''b'' + \ldots$$

les premiers facteurs $a, a', a'', \ldots$ sont tous de même signe, la somme sera égale à la somme de ces premiers facteurs

$$a + a' + a'' + \ldots,$$

multipliée par une *moyenne* entre les seconds facteurs $b, b', b'', \ldots$.

Si donc nous supposons tous les éléments $u, u', u'', \ldots$ de même signe, et que l'on désigne par $\mathfrak{M}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots)$ une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite (algébriquement) des quantités $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$, nous aurons

$$u\varepsilon + u'\varepsilon' + u''\varepsilon'' + \ldots = (u + u' + u'' + \ldots)\,\mathfrak{M}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots).$$

En désignant donc, pour abréger, par Σu, Σv les sommes proposées, on a

$$\Sigma v = \Sigma u + \Sigma u\,\mathfrak{M}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots),$$

d'où

$$\frac{\Sigma v}{\Sigma u} = 1 + \mathfrak{M}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots).$$

Une moyenne entre des infiniment petits étant nécessairement un infiniment petit, il en résulte que l'on a

$$\lim \frac{\Sigma v}{\Sigma u} = 1.$$

Donc les deux sommes Σu, Σv *diffèrent infiniment peu* l'une de l'autre [191]. Donc, si l'une d'elles a une limite finie, l'autre aura aussi une limite finie, et l'on pourra poser

$$\lim \Sigma u = \lim \Sigma v.$$

Si ces limites sont infiniment petites ou infiniment grandes, on pourra seulement établir entre les sommes une équation imparfaite [194].

Nous avons supposé, dans la démonstration, que tous les éléments u, u', u'', ... étaient de même signe. S'il n'en était pas ainsi, on partagerait la somme considérée en sommes partielles, dans chacune desquelles les éléments seraient tous de même signe, et l'on en ferait autant pour la somme des éléments v. On démontrerait alors le théorème pour chacune des sommes partielles, et l'on en conclurait aisément qu'il est vrai aussi pour les sommes totales.

196. On peut encore établir autrement ce principe fondamental. On sait, par un théorème d'Algèbre, que si les dénominateurs des fractions

$$\frac{v}{u}, \quad \frac{v'}{u'}, \quad \frac{v''}{u''}, \quad \ldots$$

sont tous de même signe, la fraction

$$\frac{v + v' + v'' + \ldots}{u + u' + u'' + \ldots}$$

sera une *moyenne* entre les fractions proposées. Or, dans le cas actuel, toutes les fractions $\frac{v}{u}$, $\frac{v'}{u'}$, $\frac{v''}{u''}$, ... sont supposées tendre vers la limite 1. Il doit donc en être de même d'une moyenne entre ces fractions, d'où l'on conclut

$$\lim \frac{\Sigma v}{\Sigma u} = 1,$$

et par suite, si Σu tend vers une limite finie [178, III],

$$\frac{\lim \Sigma v}{\lim \Sigma u} = 1.$$

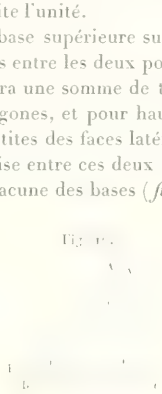
On devra faire, relativement aux signes des éléments, la même remarque qu'à la fin de la démonstration précédente.

On voit donc que, dans les deux cas de la recherche d'une limite de rapport ou d'une limite de somme, on peut laisser à chaque infiniment petit une certaine indétermination, en l'altérant, si l'on veut, infiniment peu. On pourra ainsi prendre l'arc infiniment petit pour son sinus ou sa tangente; la projection sur un axe infiniment peu incliné pour la ligne projetée, etc.

197. *Exemple.* — Appliquons le principe que nous venons d'établir à la démonstration de quelques propositions de Géométrie élémentaire.

Considérons un prisme ou un tronc de pyramide, compris entre deux plans parallèles infiniment voisins. Dans le cas du prisme, les deux bases, inférieure et supérieure, sont rigoureusement égales. Dans le cas du tronc de pyramide, les deux bases sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet de la pyramide, et, ces distances différant entre elles infiniment peu, le rapport de leurs carrés a pour limite l'unité.

Si l'on projette la base supérieure sur le plan de la base inférieure, l'espace compris entre les deux polygones, égaux ou infiniment peu différents, sera une somme de trapèzes ayant pour bases les côtés finis des polygones, et pour hauteurs les projections des hauteurs infiniment petites des faces latérales du solide. Donc la portion du plan comprise entre ces deux contours sera infiniment petite par rapport à chacune des bases (*fig.* 16), et aussi par rap-



port aux espaces limités, l'un par le contour extérieur AA'C'B'BA des deux polygones, l'autre par le contour intérieur DCED.

Or, si sur ces deux aires, prises comme bases, on élève des

prismes droits de même hauteur que la tranche de prisme oblique ou de pyramide que nous considérons, ces deux prismes, l'un plus grand, l'autre plus petit que cette tranche, différeront infiniment peu l'un de l'autre, et par suite différeront infiniment peu de la tranche. Il en sera de même, à plus forte raison, de tout prisme compris entre ces deux prismes droits, par exemple, du prisme droit construit sur la base inférieure ABC et de même hauteur que la tranche.

Cela posé, on conclut du principe fondamental établi dans les deux numéros précédents que :

1° Un prisme oblique est la limite de la somme des prismes droits infiniment minces qui ont pour bases les sections infiniment rapprochées, parallèles à la base du prisme. Il est donc équivalent à un prisme droit de même base et de même hauteur.

2° Une pyramide est la limite de la somme des tranches prismatiques infiniment minces, formées par des plans parallèles à la base.

3° Deux tranches prismatiques ou pyramidales de même hauteur infiniment petite et de bases équivalentes sont infiniment peu différentes entre elles.

4° Deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.

5° Partageons la hauteur H d'une pyramide de base B en n parties égales. La section parallèle à la base, faite à la distance $\frac{m}{n}$H du sommet, aura pour aire $\frac{m^2}{n^2}$B, et le prisme infinitésimal qui a pour base cette section et pour hauteur $\frac{1}{n}$H aura pour volume

$$\frac{m^2}{n^3}\,\mathrm{B.H.}$$

La somme des prismes (intérieurs) sera donc

$$\mathrm{B.H.}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right],$$

ou, en vertu de la formule connue qui donne la somme des carrés des $n-1$ premiers nombres,

$$\frac{\text{B.H}}{n^2} \cdot \frac{2n^3}{6} \cdot n \quad \text{B.H.} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\},$$

expression qui, pour n infiniment grand, tend vers la limite

$$\frac{\text{B.H}}{3}.$$

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. — INTÉGRALES. — MÉTHODES DE DIFFÉRENTIATION ET D'INTÉGRATION. DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES PARTIELLES. — LEURS PROPRIÉTÉS

§ I.

PROBLÈME DES TANGENTES. — VITESSES, FLUXIONS, DÉRIVÉES.

198. Toute fonction continue d'une seule variable peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe plane, en prenant pour abscisse la valeur correspondante de la variable indépendante.

Si la fonction croît proportionnellement à la variable, elle sera représentée par l'ordonnée d'une ligne droite, et elle croîtra plus ou moins rapidement avec la variable, suivant que cette droite fera un angle plus ou moins grand avec l'axe des abscisses.

Cet angle est déterminé par le *coefficient angulaire* de la droite, lequel est égal au rapport constant

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

d'un accroissement quelconque de l'ordonnée à l'accroissement correspondant de l'abscisse.

Si la fonction est liée à la variable par toute autre relation que celle de proportionnalité, la ligne qui la représentera sera une courbe. Pour juger de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle croît la fonction, à partir de la valeur représentée par le point (x, y) de la courbe, on considérera la corde qui joint ce point à un point voisin (x_1, y_1) pris sur la même courbe; suivant que cette corde fera un angle plus ou moins grand avec l'axe des x, et, par consé-

quent, suivant que son coefficient angulaire

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

sera plus ou moins grand, on jugera approximativement de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle croîtra la fonction.

Cette évaluation, qui pourrait devenir tout à fait illusoire, si le point (x_1, y_1) était pris trop loin du point donné (x, y), sera, au contraire, d'autant plus précise que les deux points seront plus rapprochés. Toutes les fois, en effet, que l'on a affaire à une fonction continue, telle que celles qui résultent des opérations algébriques ou des opérations transcendantes élémentaires, on reconnaît que le coefficient angulaire de la corde, qui représente la *pente moyenne* de l'arc de courbe, varie dans des limites de plus en plus étroites, à mesure que la corde diminue, et que la direction de la corde infiniment petite tend vers une limite déterminée, que l'on nomme la *tangente* à la courbe au point considéré. D'après cela, le coefficient angulaire de la tangente est la limite de l'expression $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, lorsque $x_1 - x$ tend vers zéro, et c'est cette limite qui donne la mesure précise de la rapidité d'accroissement de la fonction, pour la valeur considérée de la variable.

199. On peut donner encore une autre représentation d'une fonction, en considérant la variable indépendante comme exprimant un *temps*, et la fonction comme exprimant l'*espace* parcouru pendant ce temps par un point mobile sur une droite donnée.

Le mouvement du point pourra être ou *uniforme* ou *varié*. Dans le premier cas, la rapidité d'accroissement de la fonction sera représentée par la vitesse du mobile, et elle aura pour expression le rapport constant d'un espace quelconque $y_1 - y$ au temps $x_1 - x$ employé à le parcourir.

Dans le second cas, la rapidité d'accroissement, ou la vitesse du mobile à l'instant considéré, sera la limite de la *vitesse moyenne*

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

pour un intervalle de temps infiniment petit $x_1 - x$.

Newton, qui avait fondé sur cette considération le Calcul infinitésimal, assimilait l'accroissement de la variable indépendante à l'*écoulement* du temps. De là le nom de *fluente* par lequel il désignait une variable, et qu'il étendait aussi bien à la fonction qu'à la variable indépendante. De là aussi le nom de *fluxion*, qu'il donnait à la rapidité d'accroissement d'une fluente, c'est-à-dire à la vitesse du mobile qui représentait cette fluente.

200. On est donc conduit, en partant de l'un ou de l'autre de ces deux points de vue, à chercher la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de la fonction à l'accroissement infiniment petit correspondant de la variable indépendante.

Cette limite (sauf le cas de la proportionnalité ou du mouvement uniforme) varie généralement avec la valeur de la variable x à laquelle elle correspond. Elle est donc, comme la quantité y, une fonction de x, dont la forme *dérive* de cette fonction y. On l'appelle pour cette raison la *fonction dérivée*, ou simplement la *dérivée* de la fonction proposée *par rapport à la variable indépendante* x.

La fonction proposée, considérée relativement à sa dérivée, est dite la *fonction primitive* de cette dérivée.

La fonction dérivée d'une fonction donnée

$$y = f(x)$$

s'indique en faisant précéder le signe représentatif de la fonction de la caractéristique D, au bas de laquelle on place, en forme d'indice inférieur, le signe représentatif de la variable par rapport à laquelle a été prise cette dérivée. On écrira, d'après cela,

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \mathrm{D}_x y,$$

ou

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \mathrm{D}_x f(x).$$

Souvent on emploie, pour désigner la dérivée, une notation plus simple, quoique moins explicite, qui consiste à affecter d'un accent supérieur la lettre représentative de la fonction. On a ainsi

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \mathrm{D}_x y = y', \quad \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \mathrm{D}_x f(x) = f'(x).$$

D'après cette définition, le coefficient angulaire de la tangente est la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse; la vitesse d'un mobile est la dérivée de l'espace par rapport au temps.

201. Puisque l'on a, par définition,

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x),$$

cela revient à poser

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε étant une quantité infiniment petite en même temps que $x_1 - x$. On peut donc, en général, mettre l'accroissement de la fonction sous la forme

$$(1) \qquad f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)(f'(x) + \varepsilon),$$

ou, en développant,

$$f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)f'(x) + (x_1 - x)\varepsilon.$$

Le rapport

$$\frac{\varepsilon}{f(x)}$$

de la seconde partie de l'accroissement à la première étant généralement infiniment petit (comme nous le verrons bientôt), on voit que l'accroissement d'une fonction, correspondant à un accroissement infiniment petit de la variable, se compose de deux parties, dont l'une, que nous appellerons la *partie principale*, est proportionnelle à la dérivée; tandis que l'autre, que nous appellerons la *partie secondaire*, est infiniment petite par rapport à la première, et peut, par conséquent, être négligée dans les recherches de limites de rapports ou de limites de sommes [194, 195].

202. L'existence de la dérivée d'une fonction suppose essentiellement que la fonction soit continue. Mais la continuité de la fonction n'est pas, réciproquement, une condition suffisante de l'existence d'une dérivée, et l'on peut exprimer par les signes de

l'Analyse une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Les fonctions élémentaires et celles qui résultent de la combinaison d'un nombre fini de ces fonctions ont généralement une dérivée, dont nous établirons l'existence en même temps que nous déterminerons sa valeur. Il en sera de même pour les transcendantes provenant de l'intégration, et qui sont définies par leur dérivée même.

Pour les fonctions provenant de toute autre origine, l'existence d'une dérivée sera une hypothèse, qu'il faudra préalablement admettre avant de pouvoir appliquer à ces fonctions les méthodes du Calcul infinitésimal.

§ II.

PROPRIÉTÉS DES DÉRIVÉES. — RELATION ENTRE L'ACCROISSEMENT D'UNE FONCTION ET LA VALEUR MOYENNE DE SA DÉRIVÉE. — CAS OU LA DÉRIVÉE EST NULLE. — DÉPENDANCE ENTRE LE SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET LE SENS DE L'ACCROISSEMENT DE LA FONCTION.

203. 1° Soit u une fonction de x, a une constante, et

$$y = au.$$

On aura

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{a(u_1 - u)}{x_1 - x} = a \lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x},$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{D}_x(au) = a\mathbf{D}_x u.$$

2° Soient u et v deux fonctions de x, et

$$y = u + v$$

leur somme. On a

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{(u_1 + v_1) - (u + v)}{x_1 - x} = \lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \lim \frac{v_1 - v}{x_1 - x},$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{D}_x(u + v) = \mathbf{D}_x u + \mathbf{D}_x v.$$

On trouverait de même, pour une différence,

$$\mathbf{D}_x(u - v) = \mathbf{D}_x u - \mathbf{D}_x v.$$

204. Si, à partir d'une valeur x, la fonction $f(x)$ croît dans le même sens que la variable, le rapport

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

sera positif. Donc [164] la limite de ce rapport ou la dérivée $f'(x)$ ne peut être négative.

On verra de même que, si $f(x)$ croît en sens contraire de la variable, la dérivée $f'(x)$ ne peut être positive.

Si $f(x)$ conserve une valeur constante lorsque x varie de x_0 à X, le rapport

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

étant toujours nul dans cet intervalle, sa limite, savoir *la dérivée* $f'(x)$, *sera aussi nulle pour toute valeur de* x *comprise entre* x_0 *et* X.

205. De cette dernière proposition il résulte d'abord que, si la dérivée d'une fonction $f(x)$ n'est pas constamment nulle pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, la fonction ne conservera pas une valeur constante dans tout cet intervalle.

Si maintenant cette dérivée est positive, il résulte du numéro précédent que l'accroissement de la fonction aura lieu dans le même sens que celui de la variable.

Si la dérivée est négative, l'accroissement de la fonction aura lieu en sens contraire de celui de la variable.

Il résulte encore de ce qui précède que, si C désigne une constante quelconque, la dérivée de la fonction $f(x) + C$, étant égale à $D_x f(x) + D_x C$, se réduira à $f'(x)$. Donc, quelque valeur que l'on donne à la constante C, toutes les fonctions $f(x) + C$, qui ne diffèrent entre elles que par une constante, auront la même dérivée.

Nous démontrerons plus tard les réciproques de ces diverses propositions.

206. Nous allons maintenant établir la relation fondamentale qui existe entre les accroissements finis d'une fonction et les valeurs moyennes de sa dérivée.

D'après la définition même de la dérivée d'une fonction, il est

toujours possible, si cette dérivée existe, d'assigner à l'accroissement h de la variable x une valeur h_1 telle que, *pour cette valeur et pour toute valeur plus petite de* h, on ait (en n'ayant égard qu'aux valeurs numériques) l'inégalité

$$(1) \qquad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée aussi petite que l'on voudra.

Cela posé, soient x_0 et X deux valeurs de x, dans l'intervalle desquelles $f(x)$ ne cesse pas d'être continue et d'admettre une dérivée. Partageons l'intervalle $X - x_0$ en parties toutes $\leqq h_1$, h_1 étant la valeur de l'accroissement à partir de laquelle l'inégalité (1) est toujours satisfaite. Dès lors, en désignant par

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad X - x_{n-1}$$

ces intervalles partiels, toutes les différences

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0), \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_1), \quad \ldots$$
$$\frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}} - f'(x_{n-1})$$

seront moindres que ε, ce qui donnera les inégalités

$$\begin{aligned}
&\left| f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0) f'(x_0) \right| < (x_1 - x_0)\,\varepsilon,\\
&\left| f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) f'(x_1) \right| < (x_2 - x_1)\,\varepsilon,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left| f(X) - f(x_{n-1}) - (X - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) \right| < (X - x_{n-1})\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

En ajoutant ensemble ces inégalités, et désignant par S_n la somme

$$S_n = (x_1 - x_0) f'(x_0) + (x_2 - x_1) f'(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f'(x_{n-1}),$$

on aura

$$\left| f(X) - f(x_0) - S_n \right| < (X - x_0)\,\varepsilon.$$

Or, ε pouvant être choisi aussi petit que l'on voudra, il s'ensuivra que l'on pourra toujours, en partageant l'intervalle $X - x_0$ en parties suffisamment petites, faire en sorte que la somme S_n dif-

fère aussi peu que l'on voudra de l'accroissement fini $f(X) - f(x_0)$ de la fonction. Cet accroissement tendra donc, lorsque tous les intervalles partiels seront infiniment petits, vers la limite

$$(2) \qquad f(X) - f(x_0) = \lim S_n.$$

D'ailleurs, en vertu du théorème d'Algèbre invoqué au n° 195, la somme S_n est égale au produit de la somme $X - x_0$ de ses premiers facteurs, de signe constant, par une moyenne entre la plus grande et la plus petite des valeurs des seconds facteurs $f'(x_0)$, $f'(x_1)$, ..., $f'(x_{n-1})$, c'est-à-dire par une moyenne entre la plus grande et la plus petite des valeurs que peut prendre la dérivée $f'(x)$ lorsque x varie de x_0 à X. Nous aurons donc ce théorème fondamental :

Si la fonction $f(x)$ est toujours continue lorsque x varie depuis la valeur x_0 jusqu'à la valeur X, et si elle admet une dérivée pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle, on aura la relation

$$(3) \qquad f(X) - f(x_0) = (X - x_0)\,\mathfrak{M}f'(x),$$

c'est-à-dire que l'accroissement fini de la fonction, lorsqu'on passe de $x = x_0$ à $x = X$, sera égal au produit de l'accroissement de la variable par une valeur moyenne, relative à cet intervalle, de la dérivée $f'(x)$.

207. Si la fonction $f'(x)$ est elle-même continue dans cet intervalle, elle passera au moins une fois, pour une valeur de x comprise entre x_0 et X, par une valeur moyenne quelconque entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs [175], et par conséquent par celle des valeurs moyennes qui satisfait à l'égalité (3).

En désignant donc par $\mathfrak{M}(x)$ une valeur convenablement choi-

---

(¹) Cette égalité n'est autre chose qu'un cas particulier de celle qui a été démontrée au n° 195; elle s'obtient en remplaçant les accroissements infiniment petits

$$f(x_1) - f(x_0),\ f(x_2) - f(x_1),\ \ldots,$$

par les quantités

$$x_1 - x_0,\ f'(x_1)(x_1 - x_0),\ \ldots,$$

qui en *diffèrent infiniment peu*, en vertu de la définition même de la dérivée.

sie entre x_0 et X, on pourra poser

$$(4) \qquad f(X) - f(x_0) = (X - x_0)\, f'[\mathfrak{M}(x)]\,[1].$$

Si l'on pose

$$X - x_0 = h,$$

la moyenne $\mathfrak{M}(x)$ entre x_0 et $x_0 + h$ pourra se représenter par $x_0 + \theta h$, θ désignant une moyenne entre zéro et l'unité, telle que

$$0 \leqq \theta \leqq 1.$$

L'égalité (4) prendra alors la forme

$$(5) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

208. L'importance capitale de ce théorème nous engage à en donner encore d'autres démonstrations.

I. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui s'annule pour chacune des valeurs x_0 et X, et qui admette une dérivée et reste par suite continue pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X.

Si $\varphi'(x)$ n'est pas nul dans tout l'intervalle de x_0 à X, la fonction $\varphi(x)$ variera, et par suite ne restera pas nulle dans tout cet intervalle [205]. Si nous supposons, pour fixer les idées, qu'elle commence, à partir de x_0, à croître dans le même sens que la variable, soit positivement, on aura d'abord [204]

$$\varphi'(x_0) \geqq 0.$$

Pour passer ensuite de cette valeur positive de $\varphi(x)$ à la valeur nulle $\varphi(X)$, il faudra que la fonction se mette au moins une fois à varier dans le sens opposé, ce qui donnera

$$\varphi'(x) \leqq 0.$$

Si donc une fonction $\varphi(x)$ s'annule pour chacune des valeurs x_0, X, et qu'elle admette une dérivée dans tout l'intervalle de

---

[1]) Cette égalité subsisterait encore lors même que $f'(x)$ éprouverait entre x_0 et X des solutions de continuité, pourvu que cette fonction n'en passât pas moins par toutes les valeurs intermédiaires entre sa plus grande et sa plus petite valeur.

ces valeurs, cette dérivée éprouvera au moins une fois un changement de signe ou passera au moins une fois par zéro dans ce même intervalle.

Si cette dérivée $\varphi'(x)$ est supposée elle-même toujours finie et continue, elle devra nécessairement [175] passer au moins une fois par la valeur zéro, intermédiaire entre sa valeur positive et sa valeur négative. On a donc, dans ce cas, relativement à la fonction $\varphi(x)$, ce théorème, connu sous le nom de *théorème de Rolle :*

Si $\varphi(x)$ est une fonction continue, ainsi que sa dérivée $\varphi'(x)$, entre deux racines x_0, X de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 0$$

aura au moins une racine comprise entre les deux racines x_0, X de l'équation primitive.

II. Considérons la fonction

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}(x - x_0) = \varphi(x).$$

Cette fonction s'annule évidemment pour $x = x_0$ et pour $x = X$. Donc, d'après le théorème précédent, sa dérivée [203 et 205]

$$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

devra, au moins une fois, changer de signe ou s'annuler; donc la dérivée de $f(x)$ prendra des valeurs plus grandes et des valeurs plus petites que le rapport $\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$, et même, si elle est continue, passera au moins une fois par une valeur égale à ce rapport. Donc ce rapport est compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $f'(x)$, ou bien est égal à une des valeurs que prend $f'(x)$ dans l'intervalle de x_0 à X. On a donc généralement

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = \mathfrak{M} f'(x),$$

et, dans le cas de la continuité de $f'(x)$,

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'[\mathfrak{R}(x)],$$

ce qui n'est autre chose que les relations (3) et (4).

209. On peut encore démontrer le théorème comme il suit :

Supposons que $f'(x)$ satisfasse, pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X, à la double inégalité

$$m < f'(x) < M,$$

et considérons la fonction

$$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = \chi(x).$$

La dérivée de cette fonction

$$\chi'(x) = f'(x) - m$$

sera positive pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle donné; donc la fonction $\chi(x)$ croîtra, dans tout cet intervalle, dans le même sens que la variable, et, comme $\chi(x)$ s'annule pour $x = x_0$, il s'ensuit que, pour $x > x_0$, $\chi(x)$ sera positif [1]; donc on aura, en divisant par le facteur positif $x - x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > m.$$

On trouverait de même

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < M;$$

donc le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est égal, pour $x_0 < x \leqq X$, à une moyenne entre les valeurs de $f'(x)$, ce qu'il s'agissait de démontrer.

210. De ce théorème on déduit immédiatement une conséquence importante.

[1] En supposant, pour fixer les idées, $X > x_0$.

Si l'on suppose que, pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X : 1° la fonction $f(x)$ soit continue et déterminée, 2° qu'elle ait une dérivée déterminée, 3° que cette dérivée soit constamment nulle, alors la valeur moyenne de cette dérivée qui entre dans la formule (3) sera nécessairement nulle, et il en sera par suite de même de l'accroissement $f(X)-f(x_0)$. Comme ce que nous pouvons dire de X s'applique aussi à une valeur quelconque intermédiaire entre x_0 et X, il s'ensuit que l'accroissement $f(x)-f(x_0)$ est toujours nul, quel que soit x, dans l'intervalle considéré; donc la fonction $f(x)$ a une valeur constante dans cet intervalle, ce qui est la réciproque du théorème du n° 205.

Ainsi, *si la dérivée d'une fonction est constamment nulle dans un intervalle donné, la fonction se réduit dans cet intervalle à une constante.*

Cela revient à dire qu'une ligne dont la tangente est constamment parallèle à l'axe des abscisses se réduit à une droite parallèle à cet axe, ou qu'un point dont la vitesse est constamment nulle ne change pas de place.

211. Ce théorème peut se démontrer directement de la manière suivante.

Considérons la fonction

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = \psi(x),$$

k étant une constante. Si l'on suppose $f'(x) = 0$, $\psi'(x)$ se réduira à k. Pour $k > 0$, $\psi(x)$, qui est nul pour $x = x_0$, aura sa dérivée positive, et ira toujours en croissant de x_0 à X, de sorte qu'il aura son maximum pour $x = X$; donc $\psi(X)$ est positif, et l'on aura ainsi

$$\psi(X) = [f(X) - f(x_0)] - k(X - x_0) > 0.$$

On verra de même que

$$\psi(x) = [f(x) - f(x_0)] - k(x - x_0),$$

ayant sa dérivée négative, est négatif, de sorte que

$$\psi(X) = [f(X) - f(x_0)] - k(X - x_0) < 0;$$

donc $f(X) - f(x_0)$ est compris entre $-k(X - x_0)$ et $+k(X - x_0)$, quel que soit k. Or on peut supposer k infiniment petit, d'où il résulte [162] que $f(X) - f(x_0)$ est rigoureusement nul.

212. Enfin on peut se servir du procédé de démonstration du n° 208. Si la fonction $\varphi(x)$, qui s'annule pour $x = x_0$ et pour $x = X$, n'est pas nulle quel que soit x, il faudra, comme nous l'avons vu, que sa dérivée s'annule dans l'intervalle de x_0 à X. Or la supposition de $f'(x) = 0$ réduit cette dérivée à la valeur constante

$$-\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}.$$

Il faut donc que l'on ait $f(X) - f(x_0) = 0$, et, comme on peut remplacer X par une valeur quelconque prise dans l'intervalle considéré, on en conclut que $f(x)$ est constant.

213. De ce théorème il résulte réciproquement que, si une fonction ne se réduit pas à une constante dans un intervalle donné, sa dérivée ne peut pas s'annuler dans cet intervalle, sauf pour certaines valeurs particulières de la variable.

Si donc la fonction est toujours croissante avec la variable, sa dérivée est toujours positive; si elle croît en sens inverse de la variable, sa dérivée est toujours négative, ce qui complète les réciproques des propositions des n°s 204 et 205.

214. Nous avons vu [205] que deux fonctions toujours égales entre elles, ou, plus généralement, deux fonctions dont la différence est constante ont des dérivées égales; car, si l'on a

$$u - v = 0, \quad \text{ou} \quad u - v = \text{const.},$$

on en conclut

$$D_x(u - v) = D_x u - D_x v = 0.$$

Réciproquement, si les dérivées de deux fonctions sont toujours égales entre elles, la différence de ces fonctions primitives sera constante; car, si $D_x u = D_x v$, on en conclut

$$D_x u - D_x v = D_x(u - v) = 0,$$

d'où résulte

$$u - v = \text{const.}$$

Si donc on connaît une fonction primitive ayant pour dérivée une fonction donnée, on connaîtra par là même toutes les autres fonctions primitives qui auront la même dérivée, et on les obtiendra en ajoutant à la fonction primitive connue une *constante arbitraire,* c'est-à-dire une constante à laquelle on peut attribuer toutes les valeurs imaginables.

215. Les variables x et y étant liées entre elles par une relation quelconque, on peut, au lieu de considérer y comme une fonction de x, considérer x comme une fonction de y. Les deux quantités

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \quad \frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

étant inverses l'une de l'autre, il en sera de même de leurs limites, de sorte qu'on aura

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}.$$

216. Si $D_y x$ est nulle, $D_x y$ sera infinie, et réciproquement; donc, si la dérivée d'une fonction y est toujours infinie, cela indique que la variable x, que l'on avait prise pour variable indépendante, doit rester constante pour toute valeur de y. C'est le cas où la fonction y peut être représentée géométriquement par une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc, si deux variables sont liées entre elles de manière que, l'une d'elles variant, l'autre ne reste pas constante, la dérivée de l'une quelconque de ces variables, prise par rapport à l'autre, ne pourra pas prendre, pour toute valeur de celle-ci, une valeur toujours nulle ou toujours infinie.

§ III.

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

217. Nous avons vu que la dérivée de la fonction

$$y = f(x)$$

de la variable x est la limite du rapport

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

des accroissements simultanés infiniment petits de la fonction et de la variable indépendante.

Il est souvent avantageux ou même indispensable de faire entrer dans le calcul les accroissements eux-mêmes, que nous avons désignés jusqu'ici par $x_1 - x$, $y_1 - y$. On emploie pour cela une notation plus abrégée, qui indique en même temps que ces accroissements sont infiniment petits.

Ces *différences infiniment petites* entre deux états successifs d'une variable portent le nom de *différentielles*, et on les désigne par la caractéristique d, placée devant la variable dont on considère l'accroissement. D'après cette notation, au lieu de

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad f(x_1) - f(x),$$

on écrira

$$dx, \quad dy, \quad df(x).$$

La définition de la dérivée sera alors exprimée par l'équation

$$(1) \qquad D_x y = y' = \lim \frac{dy}{dx}, \quad \text{ou} \quad D_x f(x) = f'(x) = \lim \frac{df(x)}{dx}.$$

218. En désignant donc par ε une quantité infiniment petite, on a

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = y' + \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad dy = y'dx + \varepsilon dx.$$

La différentielle dy de la fonction y se compose donc de deux parties, savoir :

1° Du produit $y'dx$ de la dérivée de y par la différentielle de x. Cette partie est ce que nous appellerons (201) la *partie principale* de la différentielle dy;

2° De la quantité εdy, dont le rapport

$$\frac{\varepsilon dx}{y'dx} = \frac{\varepsilon}{y'}$$

à la partie principale est généralement infiniment petit [216], de sorte que cette partie, que nous appellerons la *partie secondaire* de la différentielle dy, est un infiniment petit du second ordre.

D'après cela, la différentielle dy *diffère infiniment peu* [191] de sa partie principale, et l'on pourra prendre ces deux quantités l'une pour l'autre, toutes les fois qu'elles se présenteront dans la recherche d'une limite de rapport [194] ou d'une limite de somme [195].

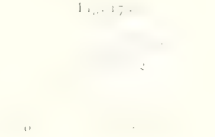
En conséquence, au lieu de prendre les équations rigoureuses (2) et (3), en emploiera, pour plus de simplicité, les équations imparfaites

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad dy = y'dx.$$

Pour la première de ces équations, $\frac{dy}{dx} = y'$, cela revient à sous-entendre le mot *limite* devant $\frac{dy}{dx}$.

219. Géométriquement, si l'on représente la fonction y par l'ordonnée d'une courbe (*fig.* 17), dy sera l'accroissement M'Q de cette

Fig. 17.



ordonnée, correspondant à l'accroissement $PP' = dx$ de l'abscisse. La partie principale $y'dx$ de dy sera l'accroissement TQ de l'ordonnée de la tangente en M, correspondant au même accroissement dx de l'abscisse. La partie infiniment petite du second ordre εdx est représentée par la différence M'T entre les ordonnées de la courbe et de la tangente pour l'abscisse $x + dx$.

Au point de vue cinématique, $y'dx$ représente l'espace parcouru pendant le temps dx en vertu d'une vitesse constante y', égale à la vitesse au commencement de ce temps dx, tandis que dy est l'espace parcouru dans le même temps en vertu de la vitesse continuellement variable, et εdx la partie de cet espace dy due à la variation de la vitesse.

220. Lorsqu'on a en vue le calcul de la dérivée y' d'une fonction y, on peut se contenter de connaître, au lieu de la différentielle dy, sa partie principale $y'dx$. En divisant cette partie principale par dx, on aura immédiatement y'. Le *Calcul différentiel*, qui a pour objet la recherche des dérivées, peut donc être considéré aussi comme s'occupant de la recherche des parties principales des différentielles.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = ax^2.$$

En faisant varier x de dx, on a

$$y + dy = a(x + dx)^2,$$

d'où, en développant, puis retranchant la première égalité de la seconde,

$$dy = 2axdx + adx^2,$$

dx^2 désignant le carré de dx, c'est-à-dire $(dx)^2$, tandis que la différentielle de x^2 est représentée par $d(x^2)$ ou par $d.x^2$.

Cette différentielle dy se compose d'une partie principale $2axdx$, et d'une partie secondaire adx^2, dont le rapport

$$\frac{adx^2}{2axdx} = \frac{dx}{2x}$$

à la partie principale est infiniment petit. Pour avoir la dérivée y', on n'aura qu'à conserver seulement la partie principale $2axdx$; en la divisant par dx, on trouvera

$$y' = 2ax$$

pour la dérivée cherchée.

Cela revient à poser les deux équations imparfaites

$$dy = 2axdx, \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

qui conduisent au même résultat que les équations rigoureuses

$$dy = 2axdx + adx^2, \quad y' = \lim \frac{dy}{dx}.$$

221. L'avantage de l'emploi des équations imparfaites à la place des équations rigoureuses consiste d'abord dans une plus grande brièveté. Ensuite la partie secondaire εdx de la différentielle peut être quelquefois aussi difficile à calculer qu'elle est inutile à connaître. Il est d'ailleurs facile de la rétablir partout où on l'a négligée, si l'on vient à sentir le besoin d'en tenir compte.

222. Nous avons démontré [206] que, si l'on partage l'intervalle $X - x_0$, dans lequel la fonction $f(x)$ est supposée continue, en intervalles partiels tous infiniment petits

$$x_0 = x_0 \quad dx_0, \quad x_1 = x_0 \quad dx_0 \quad \ldots \quad X = x_{n-1} \quad dx_{n-1},$$

l'accroissement total de la fonction, qui est la somme des accroissements partiels

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_0), \quad f(x_2) - f(x_1) = df(x_1), \quad \ldots$$
$$f(X) - f(x_{n-1}) = df(x_{n-1}),$$

est égal à la limite de la somme

$$S = f'(x_0)\,dx_0 + f'(x_1)\,dx_1 + \ldots + f'(x_{n-1})\,dx_{n-1}.$$

des accroissements successifs de la variable multipliés par les valeurs correspondantes de la dérivée de la fonction.

Cette limite de somme s'indique par le signe $\int$, initiale du mot *somme,* en bas et en haut duquel on inscrit les valeurs de x auxquelles commence et finit l'accroissement. On écrit de cette manière

$$\int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx = \lim[f'(x_0)\,dx_0 + f'(x_1)\,dx_1 + \ldots + f'(x_{n-1})\,dx_{n-1}].$$

Une telle limite de somme s'appelle une *intégrale.* Lorsqu'on indique, comme dans le cas actuel, les valeurs de la variable indépendante où commence et où se termine la sommation, l'intégrale est dite une intégrale *définie.* Les valeurs initiale et finale de x, inscrites en bas et en haut du signe $\int$, s'appellent la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de l'intégrale.

223. D'après cela, nous avons la formule fondamentale

$$f(X) - f(x_0) = \int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx.$$

Cette formule revient à dire, au point de vue géométrique, que l'accroissement de l'ordonnée d'une courbe est égal à la limite de la somme des accroissements infiniment petits de l'ordonnée de la tangente. Au point de vue cinématique, cela revient à dire que l'espace parcouru dans le temps $X - x_0$ est égal à la limite de la somme des espaces qui seraient parcourus pendant les intervalles infiniment petits dans lesquels on décompose $X - x_0$, en vertu des vitesses qu'a le mobile au commencement de chacun de ces intervalles.

224. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable. Voyons ce qui correspond aux notions précédentes dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.

Considérons la fonction

$$z = f(x, y)$$

des deux variables x, y, soit indépendantes, soit liées entre elles d'une manière quelconque. Les accroissements simultanés dx, dy de ces variables seront, suivant les cas, indépendants l'un de l'autre ou liés entre eux par une certaine relation. Dans ce dernier cas, nous supposerons que cette relation n'empêche pas ces accroissements d'être infiniment petits tous les deux à la fois.

Si l'on faisait varier une seule des deux variables x et y, x par exemple, l'autre, y, jouerait le rôle d'une constante, et l'on aurait à différentier z comme si c'était une fonction de la seule variable x. L'accroissement infiniment petit de z résultant d'un accroissement infiniment petit donné à x s'appelle la *différentielle partielle* de z par rapport à x, et se désigne par la notation

$$d_x z = f(x + dx, y) - f(x, y).$$

La limite du rapport de cette différentielle partielle $d_x z$ à l'accroissement correspondant dx de la variable x s'appelle la *dérivée*

partielle de z par rapport à x, et s'indique par le symbole

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{d_x z}{dx},$$

la forme que l'on donne à la lettre ∂ servant à distinguer les dérivées partielles des dérivées ordinaires ou *dérivées totales*, que nous avons considérées jusqu'ici.

De même, si l'on ne fait varier que y, l'accroissement résultant

$$d_y z = f(x, y + dy) - f(x, y)$$

sera la *différentielle partielle* de z par rapport à y, et la limite du rapport de cette différentielle partielle à la différentielle de y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim \frac{d_y z}{dy},$$

sera la *dérivée partielle* de z par rapport à y.

On écrit souvent, pour abréger,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

On emploie aussi, lorsqu'il n'y a pas lieu à équivoque, la même notation pour les dérivées partielles que pour les dérivées ordinaires, et l'on écrit, par exemple, la dérivée partielle de $z = f(x)$ par rapport à x sous la forme

$$D_x z \quad \text{ou} \quad D_x f(x, y) \quad \text{ou} \quad D_x f.$$

Enfin il est commode, dans un grand nombre de cas, de faire usage de la notation de Lagrange, qui consiste à désigner par

$$f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y),$$

ou, plus brièvement, par

$$f'_x, \quad f'_y$$

les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$, prises respectivement par rapport à x et à y.

225. Si l'on voulait considérer l'expression symbolique $\frac{\partial z}{\partial x}$ comme un rapport de différentielles (à un infiniment petit près), il faudrait commencer par remplacer le numérateur commun des deux expressions

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

par celle des différentielles partielles

$$d_x z, \quad d_y z$$

qui est indiquée par le dénominateur

$$\partial x \quad \text{ou} \quad \partial y.$$

De cette manière, on aura rigoureusement

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon, \qquad \frac{d_y z}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon',$$

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \varepsilon dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \varepsilon' dy,$$

ε, ε' désignant des quantités infiniment petites, la première en même temps que dx, la seconde en même temps que dy.

226. Si l'on représente la fonction $z = f(x, y)$ par l'ordonnée d'une surface, et que, par le point (x, y, z), on mène des sections parallèles aux plans des zx et des zy, x variera seule dans la section parallèle au plan des zx, y variera seule dans la section parallèle au plan des zy. Les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ seront les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes de section; de même que $d_x z$, $d_y z$ seront les variations des ordonnées z de ces deux courbes, correspondantes aux variations dx, dy des abscisses x ou y.

227. Supposons maintenant que les deux variables x, y croissent à la fois; l'accroissement résultant de z sera dit la *différentielle totale* de cette fonction, et l'on désignera cette différentielle par dz.

Le calcul de la *partie principale* de cette différentielle totale se

ramène immédiatement au calcul des parties principales des différentielles partielles, ou, ce qui est la même chose [220], au calcul des dérivées partielles. On a, en effet,

$$\begin{aligned} dz &= f(x+dx, y+dy) - f(x, y) \\ &= f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) + [f(x, y+dy) - f(x, y)] \\ &= d_x f(x, y+dy) + d_y f(x, y). \end{aligned}$$

Si l'on pose, pour un instant,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y),$$

on aura [225]

$$\begin{aligned} d_x f(x, y+dy) &= dx\,[f_1(x, y+dy) + \varepsilon]\,dx, \\ d_y f(x, y) &= [f_2(x, y) + \varepsilon']\,dy. \end{aligned}$$

D'ailleurs, en supposant que $f_1(x, y)$ soit une fonction continue dans le voisinage des valeurs considérées de x et de y, on a

$$f_1(x, y+dy) = f_1(x, y) + \varepsilon'',$$

ε'' étant, comme ε', infiniment petit en même temps que dy, tandis que ε est infiniment petit en même temps que dx. On a donc, en désignant par

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \varepsilon''$$

une quantité infiniment petite en même temps que dx et dy à la fois,

$$d_x f(x, y+dy) = [f_1(x, y) + \varepsilon_1]\,dx;$$

donc

$$dz = f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon' dy.$$

Ainsi la différentielle totale dz se compose de deux parties, dont la seconde

$$\varepsilon_1 dx + \varepsilon' dy$$

est infiniment petite par rapport à la première. Celle-ci, que nous appellerons la *partie principale,* a pour expression

$$dz = f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy,$$

ou, en remettant pour $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ les notations qui définissent ces fonctions,

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

228. On peut encore mettre cette différentielle totale sous une autre forme. Nous avons vu que l'on a rigoureusement

$$dz = d_x f(x, y + dy) + d_y f(x, y).$$

On a d'ailleurs, en désignant par ε, ε' des infiniment petits,

$$d_x f(x, y + dy) = [f_1(x, y + dy) + \varepsilon] dx$$
$$= [f_1(x, y) + \varepsilon' + \varepsilon] dx = [f_1(x, y) + \delta] dx,$$

δ étant infiniment petit lorsque dx et dy le sont tous les deux. D'autre part,

$$d_x f(x, y) = [f_1(x, y) + \delta'] dx,$$

δ' étant infiniment petit en même temps que dx; donc, en négligeant la différence infiniment petite du second ordre des quantités $\delta . dx$, $\delta' . dx$, on aura

$$d_x f(x, y + dy) = d_x f(x, y) = d_x z;$$

donc, aux infiniment petits près du second ordre, on a

$$dz = d_x f(x, y) + d_y f(x, y) = d_x z + d_y z,$$

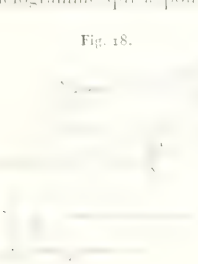
formule qui explique la dénomination de différentielles *partielles* donnée aux accroissements $d_x z$, $d_y z$.

229. Interprétons géométriquement ces diverses formules. Représentons la fonction z (*fig.* 18) par l'ordonnée d'une surface, et par le point $M(x, y, z)$ menons des plans parallèles aux plans des zx et des zy. Les ordonnées des points M_1, M_2, pris sur les courbes de section, ont pour expressions

$$f(x + dx, y), \quad f(x, y + dy).$$

En achevant le parallélogramme qui a pour côtés dx, dy, on dé-

Fig. 18.



terminera le point M′, qui a pour ordonnée $f(x+dx, y+dy)$. En menant par M un plan parallèle au plan des xy, on a

$$M'N = f(x+dx, y+dy) = f(x, y) + z'(x, y),$$

pour la différentielle totale de la fonction $z = f(x, y)$. On a ensuite

$$\begin{aligned} M'N' &= M_1N_1 + M'N'_1 = d_x f(x, y) + d_y f(x+dx, y) \\ &= M_2N_2 + M'N'_2 = d_x f(x, y) + d_x f(x, y+dy). \end{aligned}$$

Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, les différentielles partielles $d_x f(x, y)$, $d_y f(x, y)$ peuvent être remplacées par les accroissements

$$m_1N_1 = f'_1(x, y)\,dx, \quad m_2N_2 = f'_2(x, y)\,dy$$

des ordonnées des tangentes aux courbes MM_1, MM_2. De plus, si, au lieu de la section MM_2, qui a pour équation (dans son plan) $z = f(x, y)$, où x joue le rôle d'une constante, on prend la section infiniment voisine M_1M' dont l'équation est $z = f(x+dx, y)$, le paramètre x étant changé en $x+dx$, on aura

$$\begin{aligned} d_y f(x+dx, y) &= f'_2(x+dx, y)\,dy \\ &= f'_2(x, y) + z'(x, y)\,dy = d_y f(x, y). \end{aligned}$$

à un infiniment petit près du second ordre; donc on aura, dans cet ordre d'approximation,

$$M_2N_2 = M'N'_1 = m_2N_2.$$

et par suite

$$dz = M'N' = M_1N_1 + M_2N = d_x z + d_y z$$

$$m_1N_1 + m_2N = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

230. On démontrera de la même manière que, si

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

est une fonction d'un nombre quelconque de variables, indépendantes ou non, x, y, z, ..., on aura, pour la partie principale de la différentielle totale de cette fonction,

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots.$$

Ainsi la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables s'obtient en faisant la somme des différentielles partielles de la fonction, prises par rapport aux diverses variables, c'est-à-dire en différentiant la fonction successivement par rapport à chacune des variables, considérée comme variant seule, et faisant la somme des résultats obtenus.

Répétons encore une fois que toutes ces formules ne sont vraies qu'à la condition de négliger des infiniment petits du second ordre, ou de réduire les différentielles, soit totales, soit partielles, à leurs parties principales. En d'autres termes, toutes ces formules sont des équations imparfaites.

§ IV.

DES INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

231. Nous avons vu [222] comment, au moyen de l'expression du coefficient angulaire de la tangente à une courbe, on peut calculer l'accroissement de l'ordonnée de la courbe entre deux valeurs quelconques de l'abscisse. Ce problème, inverse de celui qui consiste à déduire l'expression du coefficient angulaire de celle de l'ordonnée, est un cas spécial d'un problème plus étendu, connu sous le nom de *problème inverse des tangentes*.

On voit, d'après ce qui est dit plus haut, que l'ordonnée correspondante à une abscisse variable qui vient ensuite se présente sous la forme d'une constante, qui est l'ordonnée initiale

$$y_0,$$

augmentée de la limite d'une somme d'accroissements infiniment petits, désignés tour à tour par la notation dy, et auxquels on peut substituer, sans changer la limite de la somme, les accroissements correspondants $f'(x)dx$ de l'ordonnée de la tangente, accroissements infiniment peu différents des dy. L'ordonnée variable, ainsi déterminée, peut représenter successivement les ordonnées de tous les points de la courbe, c'est-à-dire toutes les valeurs de $f(x)$. On a, par conséquent,

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx.$$

232. L'ordonnée sera donc connue pour un point quelconque de la courbe, si l'on donne sa valeur $f(x_0)$ pour une abscisse constante choisie à volonté, en même temps que l'expression générale $f'(x)$ du coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque, et si, de plus, on sait trouver la limite des valeurs de la somme des éléments infiniment petits $f'(x)dx$.

Si l'on ne donne que $f'(x)$, $f(x_0)$ restant indéterminée, on en conclura de même la valeur de $f(x)$, mais seulement à une constante arbitraire près; donc on saura calculer, du moins à une constante près, la fonction $f(x)$, toutes les fois que l'on connaîtra la dérivée de $f(x)$, et que l'on saura intégrer l'expression $f'(x)dx$.

L'expression générale de $f(x)$, connue à une constante arbitraire près, et que l'on peut représenter par $f(x) + C$, est donc déterminée quand on connaît la dérivée $f'(x)$. Il suffit de calculer l'intégrale *définie* $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$, et de lui ajouter une constante arbitraire C. Cette valeur générale

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx + C$$

s'appelle l'intégrale *indéfinie* de la différentielle $f'(x)dx$ ou de la dérivée $f'(x)$, et se représente par la notation $\int f'(x)\,dx$.

Géométriquement, l'indétermination de l'ordonnée $y = f(x)$, due à l'indétermination de l'ordonnée initiale $y_0 = f(x_0)$ ou à la présence de la constante arbitraire C, correspond à la faculté que l'on a de faire glisser la courbe, dans la direction des y, d'une quantité arbitraire, ou encore, ce qui revient au même, de déplacer l'axe des x parallèlement à lui-même. Il est clair que, dans toutes les courbes obtenues par un tel déplacement, les tangentes dont les points de contact ont la même abscisse auront le même coefficient angulaire.

233. Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $f(x)$ à une constante arbitraire près, c'est-à-dire si la fonction cherchée est donnée sous la forme $f(x) + C$, C étant arbitraire, l'accroissement

$$[f(x) + C] - [f(x_0) + C] = f(x) - f(x_0),$$

que subit la fonction lorsque x varie de x_0 à x, sera indépendant de C et complétement déterminé. L'équation

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$$

fera donc connaître l'*intégrale définie* $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$, dès que l'on connaîtra l'*intégrale indéfinie* $f(x) + C$.

On connaîtra donc la fonction dont $f'(x)$ est la dérivée, dès que l'on saura calculer la limite de somme $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$, et réciproquement, si l'on connaît une quelconque des fonctions $f(x) + C$ qui ont $f'(x)$ pour dérivée, on en tirera la limite de somme $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$.

234. Supposons, par exemple, que l'on cherche la fonction qui a pour dérivée $f'(x) = 2x$. Nous calculerons, à partir d'une valeur $x = x_0$ prise à volonté, jusqu'à une valeur finale x, la somme des éléments $f'(x)\,dx = 2x\,dx$. Pour cela, partageons l'intervalle $x - x_0$ en un nombre infiniment grand n de parties égales, et soit h la valeur commune de ces parties. La somme en question

sera

$$2x_0h + 2x_0h + h^2 + \ldots + 2x_0 + (n-1)h\,h$$

$$= 2hx_0 + \ldots + 2x_0 + (n-1)h^2,$$

$$= 2h\left[nx_0 + \frac{n(n-1)}{2}h\right]$$

$$= 2nhx_0 + n(n-1)h^2$$

$$= x_0^2 - x_0^2 + (x_0 + nh)^2 - x_0^2,$$

dont la limite est

$$x^2 - x_0^2.$$

En ajoutant à cette intégrale définie une constante arbitraire, dans laquelle on peut comprendre la constante $-x_0^2$, on aura

$$x^2 + C$$

pour la fonction la plus générale qui a pour dérivée $2x$, ou pour l'intégrale indéfinie de la différentielle $2x\,dx$.

235. Nous venons de voir qu'une fonction est connue, à une constante arbitraire près, lorsqu'on connaît sa dérivée et que l'on sait intégrer celle-ci. Il nous reste à faire voir que toute fonction continue a une intégrale, c'est-à-dire qu'il existe une certaine fonction continue dont la fonction proposée est la dérivée.

Nous emploierons dans cette démonstration le langage géométrique comme offrant un mode de représentation plus concis et plus clair que le langage de l'Algèbre pure; mais nous éviterons avec soin de tirer nos preuves des propriétés purement géométriques des figures.

Nous prendrons comme type de l'intégration d'une fonction le *problème des quadratures des courbes planes*, lequel se ramène à l'évaluation de l'aire comprise entre une courbe donnée

$$y = f(x),$$

l'axe des x, et les ordonnées correspondantes aux abscisses extrêmes x_0, X,

$$y_0 = f(x_0), \quad Y = f(X).$$

Deux aires sont dites *équivalentes* lorsqu'elles sont les sommes ou les différences de parties superposables chacune à chacune, ou

encore lorsqu'elles sont les limites de sommes ou de différences de parties superposables. Nous allons démontrer qu'il existe un rectangle déterminé, équivalent à la limite de certaines sommes de rectangles infinitésimaux formés avec les ordonnées de la courbe proposée, et représentant les éléments de l'intégrale de cette fonction. Cette limite satisfaisant aux mêmes inégalités *géométriques* que l'aire de la figure curviligne, on dira qu'elle est *équivalente* à cette aire curviligne, et, de cette manière, l'intégrale aura pour représentation géométrique l'aire de la courbe.

236. Nous supposerons d'abord que l'ordonnée $y = f(x)$ aille toujours en variant dans le même sens entre les abscisses x_0 et X. Si elle était tantôt croissante, tantôt décroissante, on partagerait l'intervalle $X - x_0$ en intervalles partiels, dont les limites correspondraient aux changements de sens de l'accroissement, et l'intégrale cherchée serait la somme des intégrales partielles obtenues pour chacun de ces intervalles.

Construisons, sur la base $X - x_0$, deux rectangles ayant pour hauteurs l'un l'ordonnée initiale y_0, l'autre l'ordonnée finale Y, et que nous appellerons l'un rectangle *intérieur*, l'autre rectangle *extérieur* à l'aire curviligne (*fig.* 19). Partageons maintenant l'in-

Fig. 19.

tervalle $X - x_0$ en un nombre quelconque de parties, et sur chacune de ces parties, comme base, construisons un rectangle intérieur et un rectangle extérieur. Chaque rectangle intérieur étant plus grand que la partie correspondante du rectangle intérieur primitif, il en résulte que la somme des rectangles intérieurs est plus grande que le rectangle intérieur primitif. Pareillement, la somme des nouveaux rectangles extérieurs est moindre que le rectangle extérieur primitif.

Il résulte de là que, si l'on subdivise de nouveau les intervalles partiels, la somme des rectangles intérieurs

$$s = y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(X - x_{n-1})$$

croîtra par cette subdivision, tandis que la somme des rectangles extérieurs

$$S = y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + \ldots + y_n(X - x_{n-1})$$

décroîtra. De plus la somme des rectangles intérieurs restera toujours *plus petite* que la somme des rectangles extérieurs.

La différence $S - s$ entre ces deux sommes, pour un état de subdivision donné, est égale à la somme des rectangles dont les bases sont les divisions de $X - x_0$, et dont les hauteurs sont les différences de deux ordonnées consécutives. Elle est donc égale [195] à un rectangle ayant pour base $X - x_0$ et pour hauteur une moyenne entre les différences $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, Y - y_{n-1}$.

Il s'ensuit de là que cette différence $S - s$ est infiniment petite lorsque les différences $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots$ sont elles-mêmes toutes infiniment petites, ce qui arrive lorsque toutes les divisions $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots$ sont infiniment petites et que la fonction y est continue.

Si donc on porte sur une droite des quantités proportionnelles aux valeurs des sommes de rectangles (par exemple, si l'on construit les hauteurs des rectangles équivalents à ces sommes et ayant pour base commune $X - x_0$), les extrémités de ces longueurs, relatives aux deux séries de rectangles, intérieurs et extérieurs, iront à la rencontre l'une de l'autre, sans jamais coïncider, mais en s'approchant l'une de l'autre indéfiniment. Elles tendent donc vers une limite commune; donc il existe un rectangle déterminé (pour chaque mode de subdivision, du moins), plus grand que chaque somme de rectangles intérieurs, plus petit que chaque somme de rectangles extérieurs, et limite commune de ces deux séries de sommes.

237. Il reste à faire voir que ce rectangle-limite ne dépend pas du mode de subdivision de l'intervalle $X - x_0$ en parties infiniment petites. Soient, en effet, s et S deux sommes de rectangles, intérieurs et extérieurs, obtenues par un certain mode de subdivi-

sion, et soient s' et S' deux sommes analogues, obtenues par un autre mode de subdivision. Si nous *superposons* les deux modes de subdivision, le nouveau mode sera formé par la subdivision de chacun des systèmes d'intervalles précédents. En désignant donc par s'', S'' les sommes de rectangles correspondantes au nouveau mode, on aura les deux suites d'inégalités

$$s < s'' < S'' < S,$$
$$s' < s'' < S'' < S'.$$

Les différences $S - s$, $S' - s'$ étant infiniment petites, il en sera de même, à plus forte raison, des différences

$$s'' - s, \quad S - S'', \quad s'' - s', \quad S' - S'',$$

et par suite aussi des différences

$$s' - s, \quad S - S',$$

donc les variables s et s', S et S', étant infiniment peu différentes entre elles, ne peuvent que converger [165] vers une seule et même limite commune, laquelle est, par conséquent, indépendante du mode de division de l'intervalle $X - x_0$.

238. Ce rectangle-limite, dont nous venons d'établir l'existence en partant de la seule hypothèse de la continuité de la fonction y, et indépendamment de toute propriété purement géométrique de la figure qui nous a tenu lieu de notation algébrique; ce rectangle satisfait aux mêmes inégalités géométriques que l'aire curviligne, celle-ci étant, comme le rectangle-limite, plus grande que toute somme de rectangles intérieurs, et plus petite que toute somme de rectangles extérieurs. Nous dirons, par suite, que ce rectangle, compris entre les mêmes limites infiniment rapprochées que l'aire curviligne, est *équivalent* à cette aire, de sorte que l'aire curviligne sera une représentation de la limite commune des deux sommes s et S.

239. Si l'on représente maintenant tour à tour par dx les accroissements infiniment petits $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$, et par x les valeurs de la variable qui correspondent soit au commencement, soit à la fin, soit, plus généralement, à un point quel-

conque de chacun de ces intervalles, chacune des sommes s ou S sera la somme des valeurs que prend l'expression

$$f(x)\,dx,$$

lorsque x varie depuis x_0 jusqu'à X. La limite commune de ces deux sommes sera, d'après la notation que nous avons déjà indiquée [222], l'*intégrale définie*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

et cette intégrale représentera l'aire de la courbe $y = f(x)$, comprise entre les abscisses x_0 et X, qui sont dites les *limites* de l'intégrale.

Cette aire est une fonction des deux abscisses extrêmes x_0 et X, ou simplement de l'une d'elles, de l'abscisse finale X, par exemple, si l'on considère l'abscisse initiale x_0 comme constante. Désignons cette fonction par F(X).

240. Si l'on fait croître X de dX, l'aire croîtra d'un trapèze curviligne de base dX, compris entre deux rectangles de même base et dont les hauteurs sont $f(X)$ et $f(X+dX)$ [238]; donc l'accroissement $dF(X)$ de l'aire F(X) sera compris entre $f(X)\,dX$ et $f(X+dX)\,dX$, et par suite le rapport $\frac{dF(X)}{dX}$ sera compris entre $f(X)$ et $f(X+dX)$; donc la limite de ce rapport, c'est-à-dire la dérivée $F'(X)$ de la fonction F(X), aura pour valeur l'ordonnée extrême de l'aire, et l'on aura

$$F'(X) = D_X \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(X).$$

Ainsi la dérivée de l'aire d'une courbe, prise par rapport à l'abscisse finale, est égale à l'ordonnée finale.

Il en résulte que la différentielle de l'aire F(X), réduite à sa partie principale, a pour valeur

$$dF(X) = d\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(X)\,dX;$$

donc la différentielle d'une intégrale définie dont la limite supé-

rieure est seule variable est égale à l'expression placée sous le signe $\int$, dans laquelle on remplace la variable x par la limite supérieure.

241. Ainsi l'intégrale définie $F(X)$ est une fonction de X ayant pour dérivée $f(X)$, et, de plus, s'annulant évidemment lorsque les deux limites x_0 et X deviennent égales, c'est-à-dire que l'on a

$$F(x_0) = 0.$$

On pourra maintenant obtenir la fonction *la plus générale* $\varphi(X)$ qui ait $f(X)$ pour dérivée, en ajoutant à $F(X)$ une constante arbitraire [214]. Si donc on peut calculer l'intégrale définie $F(X)$ jusqu'à une limite quelconque X, la fonction la plus générale $\varphi(X)$ qui satisfasse à la condition

$$\varphi'(X) = f(X)$$

aura pour expression

$$\varphi(X) = F(X) + C = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx) + C,$$

C désignant une constante arbitraire, et x_0 une limite inférieure constante que l'on peut choisir à volonté. Cette fonction $\varphi(X)$ s'appelle l'*intégrale indéfinie* de la fonction $f(X)$ ou de la différentielle $f(X)\,dX$ [232].

Réciproquement, si l'on connaît l'intégrale indéfinie $\varphi(X)$, cette intégrale ayant la même dérivée que l'intégrale définie $F(X)$, celle-ci pourra être représentée par $\varphi(X) + C$. Pour déterminer la constante C, il suffit de remarquer que, $F(X)$ devant s'évanouir pour $X = x_0$, on doit avoir

$$\varphi(x_0) + C = 0,$$

d'où

$$C = -\varphi(x_0)$$

et

$$F(X) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0).$$

On aura donc la limite de somme ou l'intégrale définie $F(X)$, prise entre deux limites données quelconques x_0 et X, en substituant tour à tour ces deux limites dans l'intégrale indéfinie $\varphi(X)$, et re-

tranchant la valeur relative à la limite inférieure de la valeur relative à la limite supérieure.

242. La quantité $F(X) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ est une fonction de la limite supérieure X, la limite inférieure x_0 étant supposée constante. On peut représenter cette limite supérieure variable par la lettre x, affectée déjà à la variable indépendante sous le signe f, et écrire

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Mais alors il faut bien se garder de confondre les significations de la lettre x dans ces deux emplois. Dans un cas, elle représente uniquement l'abscisse finale, limite supérieure de l'intégrale; dans l'autre, elle désigne une quelconque des abscisses comprises depuis x_0 jusqu'à l'abscisse finale x inclusivement, c'est-à-dire une quelconque des valeurs, en nombre infini, que prend la variable indépendante pendant la sommation, lorsqu'on passe de la valeur initiale x_0 à la valeur finale, désignée aussi par x.

Si l'on craint une confusion entre ces deux significations d'une même lettre dans une même formule, on peut, sans changer le résultat, substituer sous le signe f, à la lettre x, une autre lettre quelconque, et écrire, par exemple,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

243. On voit donc que, étant donnée une fonction quelconque $f(x)$, qui reste finie et continue entre les deux limites x_0 et X, la somme

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$$

des produits des valeurs successives de la fonction par les accroissements infiniment petits qui font passer d'une valeur de la variable à la suivante a toujours une valeur finie et déterminée, fonction de X, et cette valeur s'appelle l'*intégrale définie* de la fonction $f(x)$, ou plutôt de la différentielle $f(x)dx$, prise entre les limites x_0 et X. De plus, cette intégrale définie, augmentée

d'une constante arbitraire, donne la fonction la plus générale de X qui ait pour dérivée $f(X)$, c'est-à-dire l'*intégrale indéfinie* de $f(x)$ ou de $f(x)dx$.

Réciproquement, si l'on connaît l'intégrale indéfinie $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition $\varphi'(x) = f(x)$, on aura l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

en prenant la différence entre les valeurs de $\varphi(x)$ qui correspondent à x_0 et à X.

Si la fonction $f(x)$ était simplement *finie* entre les limites x_0 et X, mais qu'elle éprouvât dans l'intervalle une ou plusieurs solutions de continuité, ce que nous venons de dire n'en subsisterait pas moins, comme on le verrait en partageant la somme totale des éléments $f(x)dx$ en sommes partielles terminées aux divers points de discontinuité (tels que le point a de la *fig.* 20). Les raisonne-

Fig. 20.

ments précédents, subsistant pour chaque somme partielle, s'appliqueraient aussi à la réunion des sommes partielles ou à la somme totale.

Nous examinerons plus tard le cas où $f(x)$ devient infinie dans l'intervalle des limites.

244. Si l'on prenait l'abscisse X pour abscisse initiale, et x_0 pour abscisse finale, on aurait alors

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx$$

$$= \lim\left[f(X)(x_{n-1} - X) + f(x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) + \ldots + f(x_1)(x_0 - x_1)\right]$$

$$= \lim\left[f(x_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(X)(X - x_{n-1})\right]$$

$$= -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Donc *une intégrale définie prend une valeur égale et de signe contraire, lorsqu'on échange entre elles ses deux limites.*

245. Soit ξ une valeur quelconque intermédiaire entre x_0 et X. On a identiquement

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

$$= \lim f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(\xi - x_{n-1}) + f(\xi)(x_n - \xi) + f(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \ldots + f(x_{n'-1})(X - x_{n'-1}),$$

$$= \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx.$$

On peut donc décomposer une intégrale définie en deux parties, correspondantes à une décomposition de l'intervalle des limites : c'est ce qu'on exprime, sous une forme abrégée, par la formule

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} = \int_{x_0}^{\xi} + \int_{\xi}^{X}.$$

De cette formule, on tire [244], à cause de $\int_{\xi}^{X} = -\int_{X}^{\xi}$,

$$\int_{x_0}^{\xi} = \int_{x_0}^{X} - \int_{\xi}^{X} = \int_{x_0}^{X} + \int_{X}^{\xi}.$$

Or X désigne une quantité *en dehors* de l'intervalle des limites x_0 et ξ. Donc, en échangeant entre elles les lettres ξ et X, on voit que la formule (1) subsiste encore, lors même que ξ est une quantité non comprise entre les limites x_0 et X, pourvu qu'elle ne sorte pas de l'intervalle dans lequel la fonction $f(x)$ est constamment finie.

246. La formule (1) du numéro précédent peut s'écrire [244]

$$\int_{x_0}^{X} = \int_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{\xi}.$$

On peut donc remplacer une intégrale prise entre les limites x_0 et X par la différence de deux intégrales ayant pour limites supé-

rieures x_0 et X, et pour limite inférieure commune une quantité arbitraire ξ.

A l'aide de cette transformation, on peut toujours ramener une intégrale dont les deux limites sont variables à la différence de deux intégrales prises l'une et l'autre à partir d'une limite inférieure constante, et n'ayant de variable que la limite supérieure.

247. Soient $y_{\prime}$ la plus petite et $y_{\prime\prime}$ la plus grande de toutes les ordonnées de la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

dans l'intervalle des abscisses x_0 et X. Les deux sommes de rectangles s et S, et par suite aussi leur limite commune, qui est l'aire de la courbe, sont comprises entre les deux rectangles

$$(X - x_0)y_{\prime}, \quad (X - x_0)y_{\prime\prime}.$$

Donc l'aire de la courbe est égale au produit de $X - x_0$ par une moyenne η, convenablement choisie entre $y_{\prime}$ et $y_{\prime\prime}$.

Si la fonction $y = f(x)$ est continue entre x_0 et X, ou, du moins, si elle passe, dans cet intervalle, par toutes les valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande, c'est-à-dire, si toute parallèle à l'axe des x, menée entre le point le plus bas et le point le plus haut de la courbe, rencontre cette courbe, il existera alors entre x_0 et X au moins une valeur ξ, pour laquelle $f(\xi)$ sera égale à la valeur moyenne en question η. On aura, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0)f(\xi),$$

ξ satisfaisant aux inégalités

$$x_0 < \xi < X, \quad \text{ou} \quad x_0 > \xi > X,$$

suivant que l'on a $X > x_0$ ou $X < x_0$.

Si l'on pose

$$X = x_0 + h,$$

toute valeur ξ intermédiaire entre x_0 et $x_0 + h$ pourra être représentée par $x_0 + \theta h$, en désignant par θ un nombre *positif et*

moindre que l'unité. On pourra donc écrire

$$\int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = hf(x+\theta h).$$

248. Cette dernière formule résulte encore très-simplement de la considération de la tangente, que nous avons déjà employée au commencement de ce paragraphe. Étant donnée la courbe

$$y = F(x),$$

l'accroissement de l'ordonnée

$$Y - y_0 = F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\,dx$$

est égal au produit de $X - x_0$ par le coefficient angulaire de la corde qui joint les deux points extrêmes (x_0, y_0) et (X, Y) de la courbe. Or, si $F'(x)$ est toujours finie et continue, ou du moins si elle passe par toutes les valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande, on voit, en transportant la corde parallèlement à elle-même, de manière que ses deux points d'intersection avec la courbe se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, on voit, dis-je, qu'il existera, en un point au moins de la courbe compris entre les extrémités, une tangente parallèle à cette corde. Si l'on appelle ξ l'abscisse du point de contact de cette tangente, le coefficient angulaire de la corde sera égal à $F'(\xi)$. On aura donc la formule

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\,dx = (X - x_0)F'(\xi),$$

ou

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} F'(x)\,dx = hF'(x_0 + \theta h),$$

pour

$$0 < \theta < 1.$$

En faisant $F'(x) = f(x)$, on retrouve la formule du numéro précédent.

249. Nous avons vu que la fonction la plus générale qui ait

$f(x)$ pour dérivée se calcule en cherchant une limite de somme ou une intégrale définie, et lui ajoutant une constante arbitraire, et que l'on appelle, pour cette raison, cette fonction l'intégrale *indéfinie* de la fonction $f(x)$.

On désigne une intégrale indéfinie par le même signe $\int$ qu'une intégrale définie, si ce n'est qu'on n'écrit pas de limites en bas et en haut du signe. On a ainsi

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

C désignant une constante arbitraire, et x_0 une limite inférieure constante choisie à volonté.

250. Pour donner un exemple de différentiation et d'intégration, soit la fonction

$$y = x^m,$$

m étant un nombre entier et positif. En changeant x en $x_1 = x + dx$, il vient, pour l'accroissement correspondant de y,

$$y_1 - y = dy = x_1^m - x^m = x_1^m - x^m = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \ldots + x^{m-1},$$

d'où, en divisant par $x_1 - x = dx$,

$$\frac{dy}{dx} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \ldots + x^{m-1}.$$

Si l'on fait, dans le second membre de cette égalité, $x_1 = x$, il vient

$$y' = \lim \frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

$$y' dx = m x^{m-1} dx,$$

$$dy = (y' + \varepsilon)\,dx = m x^{m-1} dx + \varepsilon dx,$$

ou, en réduisant dy à sa partie principale,

$$dy = m x^{m-1} dx.$$

Si l'on intègre maintenant cette différentielle entre les limites

x_0 et X, on aura

$$\int_{x_0}^{X} dy = \lim \ldots = Y - \ldots,$$

$$\lim m \ldots = \ldots X \ldots,$$

$$m . \lim x \ldots = \ldots X \ldots$$

$$m . \int_{x_0}^{X} \ldots dx = Y - \ldots X \ldots .$$

donc

$$\int_{x_0}^{X} \ldots dx = \frac{X^m}{\ldots} \ldots .$$

ou, en changeant m en $n + 1$,

$$\int_{x_0}^{X} \ldots dx = \frac{X \ldots}{n + 1} \ldots .$$

En ajoutant à cette quantité une constante arbitraire, dans la quelle on peut comprendre le terme

$$\frac{\ldots}{n + 1},$$

on aura, pour l'intégrale indéfinie de la fonction x^n,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C.$$

§ V.

MÉTHODES GÉNÉRALES DE DIFFÉRENTIATION.

251. *Différentiation des fonctions inverses.* — Soient f et φ deux fonctions telles que l'on ait [215]

$$y = f(x), \quad x = \varphi(y).$$

De l'identité

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

on tire, entre les limites des facteurs [178, II], la relation

$$D_x y \cdot D_y x = 1, \quad \text{ou} \quad f'(x) \cdot \varphi'(y) = 1.$$

d'où

$$D_x y = \frac{1}{D_y x}, \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Exemple. — Soit

$$y = f(x) = \sqrt[m]{x}, \quad \text{d'où} \quad x = \varphi(y) = y^m.$$

On a [250]

$$\varphi'(y) = m y^{m-1},$$

d'où

$$f'(x) = D_x \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m y^{m-1}} = \frac{1}{m} y^{1-m} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1},$$

ce qui montre que la différentiation de la puissance fractionnaire $x^{\frac{1}{m}}$ se fait par la même règle que celle d'une puissance entière.

252. *Différentiation d'une fonction de fonction.* — Supposons z déterminé en fonction de x par les deux équations

$$z = \varphi(y), \quad y = \chi(x).$$

L'identité

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

donne [178, II], entre les limites, la relation

$$D_x z = D_y z \cdot D_x y = \varphi'(y) \cdot \chi'(x).$$

De même, si l'on a

$$u = \sigma(z), \quad z = \varphi(y), \quad y = \chi(x),$$

on trouvera

$$D_x u = D_z u \cdot D_y z \cdot D_x y = \sigma'(z) \cdot \varphi'(y) \cdot \chi'(x),$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre des fonctions intermédiaires.

Exemples. — I. Soient les deux fonctions inverses l'une de

l'autre

$$x = \varphi(y), \quad y = f(x).$$

On aura, dans ce cas,

$$z = x, \quad \text{d'où} \quad D_y z = D_y x = 1 = \varphi'(y) \cdot f'(x),$$

et l'on retrouve ainsi la règle du numéro précédent.

II. Soit la puissance fractionnaire

$$z = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

En posant $x^m = y$, on aura

$$z = y^{\frac{1}{n}}, \quad y = x^m,$$

d'où [251 et 250]

$$D_y z = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} (x^m)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{m\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1},$$

ce qui donne encore la même règle que pour les puissances entières.

III. Soit

$$z = (a + bx^m)^n,$$

m et n étant des nombres positifs, entiers ou fractionnaires. On posera

$$y = a + bx^m, \quad z = y^n,$$

d'où

$$D_y z = n(a + bx^m)^{n-1}, \quad mbx^{m-1}, \quad \text{etc.}$$

253. *Différentiation des fonctions composées.* — Soient $u, v, \ldots$ des fonctions données de x, et

$$y = f(u, v, \ldots)$$

une fonction donnée de $u, v, \ldots$. La différentielle de y, réduite à sa partie principale, sera [230]

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \ldots,$$

les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ se calculant par les mêmes règles que la dérivée d'une fonction d'une seule variable. En divisant par dx, on a, pour la dérivée de y,

$$D_x y = \frac{\partial f}{\partial u} D_x u + \frac{\partial f}{\partial v} D_x v + \ldots = \frac{\partial y}{\partial u} D_x u + \frac{\partial y}{\partial v} D_x v + \ldots$$

Cette formule serait encore vraie si $u, v, \ldots$ étaient des fonctions de plusieurs variables indépendantes $x, t, \ldots$. Seulement, comme la dérivée de y par rapport à x serait alors une dérivée partielle, on devrait remplacer $dy, du, dv, \ldots$ par les différentielles $d_x y, d_x u, d_x v, \ldots$, et considérer $D_x y, D_x u, D_x v, \ldots$ comme représentant des dérivées partielles.

Exemple. — Soit le produit

$$y = uv.$$

On aura

$$D_x y = \frac{\partial (uv)}{\partial u} D_x u + \frac{\partial (uv)}{\partial v} D_x v = v D_x u + u D_x v,$$

et la différentielle (réduite à sa partie principale) sera

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

254. *Différentiation des fonctions implicites.* — Soit y une fonction de x, donnée par une équation non résolue

$$f(x, y) = 0.$$

Cette équation exprime que y doit varier avec x de telle manière que la fonction $f(x, y)$ ait constamment la même valeur zéro. Donc la différentielle totale $df(x, y)$ de cette fonction doit être rigoureusement nulle, c'est-à-dire que l'on doit avoir [227]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon'\right) dy = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon}{\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon'},$$

et, en passant à la limite,

$$D_x y = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{f'_x}{f'_y}.$$

On peut encore dire que $f(x, y)$, considérée comme une fonction composée de x (dont y est une fonction), doit avoir la valeur constante zéro; donc sa dérivée par rapport à x, prise suivant la règle du numéro précédent, doit être constamment nulle, ce qui donne l'équation

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} D_x y = 0.$$

Cette équation détermine $D_x y$ en fonction de x et de y. On peut, au moyen de l'équation proposée, en tirer, par élimination, $D_x y$ en fonction de la seule variable indépendante x.

On voit que, dans la pratique, la différentiation d'une fonction implicite s'opère *en différentiant l'équation* qui détermine cette fonction, et effectuant ensuite les éliminations que l'on jugera convenable de faire.

255. De même, si l'on a trois variables x, y, z, liées par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

on en tirera les équations rigoureuses

$$df(x, y, z) = 0, \quad dF(x, y, z) = 0,$$

que l'on pourra remplacer par les équations imparfaites

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0,$$
$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

En posant, pour abréger,

$$X = \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} f'_z & f'_x \\ F'_z & F'_x \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix},$$

on aura donc [134]

$$dx : dy : dz = X : Y : Z.$$

d'où l'on tire

$$D_x y = \frac{Y}{X}, \quad D_x z = \frac{Z}{X}.$$

256. En général, si l'on considère $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, liées entre elles par n équations

$$\begin{gathered} f_1(x, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{gathered}$$

on aura, en différentiant ces équations, et réduisant toutes les différentielles à leurs parties principales,

$$\begin{gathered} f'_1(x)dx + f'_1(x_1)dx_1 + \ldots + f'_1(x_n)dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_n(x)dx + f'_n(x_1)dx_1 + \ldots + f'_n(x_n)dx_n = 0, \end{gathered}$$

et, si l'on pose

$$R = \begin{vmatrix} f'_1(x_1) & f'_1(x_2) & \ldots & f'_1(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f'_n(x_1) & f'_n(x_2) & \ldots & f'_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$$R_i = (-1)^i \begin{vmatrix} f'_1(x) & \ldots & f'_1(x_{i-1}) & f'_1(x_{i+1}) & \ldots & f'_1(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f'_n(x) & \ldots & f'_n(x_{i-1}) & f'_n(x_{i+1}) & \ldots & f'_n(x_n) \end{vmatrix},$$

on en conclura [136]

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = R : R_1 : \ldots : R_n,$$

d'où l'on tirera, par simple division, les dérivées de n quelconques de ces variables par rapport à la $(n+1)^{\text{ième}}$.

257. Supposons enfin que, au lieu de n équations entre $n+1$ variables, on ait n équations entre $n+k$ variables. On pourra considérer ces n équations comme déterminant n de ces variables,

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

en fonction des k autres

$$v_1, v_2, \ldots, v_k,$$

supposées indépendantes.

On peut alors se proposer soit de trouver les différentielles totales des n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, soit de trouver leurs dérivées partielles par rapport à l'une des variables indépendantes, à x_1 par exemple. Dans le premier cas, on égalera à zéro les différentielles totales des premiers membres des équations proposées; dans le second cas, on égalera à zéro leurs différentielles partielles par rapport à x_1, ou, ce qui revient au même, leurs dérivées partielles par rapport à x_1. Dans les deux cas, on aura à résoudre n équations à n inconnues, lesquelles inconnues seront soit les n différentielles totales $du_1, \ldots, du_n$, soit les n dérivées partielles $\frac{du_1}{dx_1}, \ldots, \frac{du_n}{dx_1}$.

258. Remarquons que le calcul des dérivées partielles ou des différentielles partielles peut toujours se ramener à celui des différentielles totales, la différentielle partielle $d_{x_1} u_1$, par exemple, étant ce que devient la différentielle totale du_1, lorsqu'on y annule les différentielles de toutes les variables indépendantes $x_2, \ldots, x_n$, autres que x_1.

Exemples. — I. Soit la fonction

$$y = \frac{1}{x}.$$

Mettons-la sous la forme d'une fonction implicite, donnée par l'équation

$$xy = 1.$$

En différentiant cette équation, il vient [253]

$$x\,dy + y\,dx = 0,$$

et, par suite,

$$D_x y = -\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$D_x x^{-1} = -1\,x^{-1-1}.$$

d'où l'on conclut que la puissance $-1^{\text{ième}}$ se différentie par la même règle que les puissances positives. On étendrait aisément cette conséquence à toutes les puissances négatives en général.

II. Soit l'équation

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

On en tire, en différentiant,

$$2x\,dx - 2y\,dy = 0, \quad \text{d'où} \quad D_x y = \frac{x}{y}.$$

Si l'on veut exprimer $D_x y$ au moyen de x seulement, il faudra éliminer y au moyen de l'équation proposée, laquelle donne pour y les deux valeurs

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{d'où} \quad D_x y = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

comme on aurait pu le tirer directement de l'équation résolue.

III. Soient les équations d'une conique sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

On en tire

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \quad ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{y(b-c)z} = \frac{dy}{z(c-a)x} = \frac{dz}{x(a-b)y}, \text{ etc.}$$

§ VI.

DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DES PRINCIPALES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES. — FORMULES D'INTÉGRATION QUI S'EN DÉDUISENT.

259. *Différentielle d'une somme.* — On trouve immédiatement

$$d(u + v - w) = du + dv - dw,$$

d'où

$$D_x(u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w.$$

On en déduit réciproquement

$$\int(du + dv - dw) = u + v - w + C,$$

c'est-à-dire

$$f(f_1(x)) = f(x) = f'(x)\,dx = f'(f_1(x))\,dx = f'(f(x))\,dx.$$

260. *Différentielle d'un déterminant.* — Soit un déterminant

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & \dots & a_1^{(n-1)} \\ a_2 & a'_2 & \dots & a_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(n-1)} & a^{(n-1)} & \dots & a^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

dans lequel on suppose variables les éléments d'une même ligne, par exemple ceux de la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale

$$a'_i,\ a''_i,\ \dots,\ a^{(n-1)}_i.$$

En mettant le déterminant sous la forme

$$R = A'_i\,a'_i + A''_i\,a''_i + \dots + A^{(n)}_i\,a^{(n)}_i,$$

et remarquant que les coefficients $A'_i, A''_i, \dots, A^{(n)}_i$ sont indépendants de tous les éléments $a'_i, a''_i, \dots, a^{(n)}_i$, il vient

$$dR = A'_i\,da'_i + A''_i\,da''_i + \dots + A^{(n)}_i\,da^{(n)}_i = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \dots & a^{(n-1)}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ da'_i & da''_i & \dots & da^{(n-1)}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_i & a''_i & \dots & a^{(n-1)}_i \end{vmatrix}.$$

Donc, pour différentier un déterminant par rapport aux éléments de l'une de ces lignes, il suffit de remplacer, dans le déterminant, ces éléments par leurs différentielles.

Si les éléments de plusieurs lignes varient, la différentielle totale du déterminant sera égale à la somme des différentielles obtenues en faisant varier chacune de ces lignes séparément, et, par suite, à la somme des déterminants obtenus en remplaçant successivement, dans chaque ligne variable, les éléments par leurs différentielles. On a ainsi, en supposant tous les éléments variables,

$$d\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} da & db \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ da' & db' \end{vmatrix}.$$

On passera ensuite immédiatement des différentielles aux dérivées soit totales, soit partielles.

261. *Différentielle d'un produit.* — D'après ce que nous avons vu [253], on a, pour $y = uv$,

$$dy = v\,du + u\,dv,$$

d'où

$$y' = vu' + uv'.$$

On peut écrire ce résultat sous la forme

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

formule qui s'énonce en disant que l'*accroissement relatif* infiniment petit d'un produit est égal à la somme des accroissements relatifs infiniment petits des facteurs.

Cette formule peut s'étendre à un produit d'un nombre quelconque de facteurs. On a, en effet, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{d(vw)}{vw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w},$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

Cette formule sert, dans les calculs d'approximation, à évaluer l'erreur *très-petite* d'un produit au moyen des erreurs *très-petites* des facteurs. En effet, lorsque les carrés et les produits deux à deux des erreurs sont assez petits pour ne pas influer sur l'appréciation que l'on veut obtenir de l'ordre de l'erreur du résultat, on peut traiter ces erreurs comme on traite les accroissements infiniment petits, et se servir comme *équations approchées* des équations *imparfaites* que donne la différentiation. D'après cela, on pourra dire que, dans le cas où les erreurs sont *très-petites,* l'erreur *relative* d'un produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs.

La formule précédente donne, pour un nombre quelconque de facteurs,

$$d(uvw\ldots) = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots,$$

comme on l'aurait trouvé également en appliquant la règle de la différentiation des fonctions composées [253]. On voit que la différentielle d'un produit s'obtient en faisant la somme des résultats que l'on a, lorsqu'on remplace successivement chacun des facteurs par sa différentielle.

En particulier, si l'un des facteurs v est égal à une constante a, on a

$$d(au) = a\,du,$$

comme nous l'avions trouvé au n° 203.

262. De ces formules on tire, réciproquement,

$$(1) \qquad \int (v\,du + u\,dv) = uv + C,$$

$$(2) \qquad \int a\,du = a\int du = au + C.$$

Cette dernière formule montre comment on peut faire entrer un facteur constant sous le signe $\int$, ou comment on peut l'en faire sortir.

On tire de la formule (1) [259]

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

formule sur laquelle repose l'importante transformation connue sous le nom d'*intégration par parties*.

263. *Différentielle d'un quotient.* — On a, pour $y = \frac{u}{v}$,

$$dy = d\frac{u}{v} = \frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v(v + dv)} = \frac{1}{1 + \frac{dv}{v}}\,\frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

ou, à une erreur près infiniment petite du second ordre, en remplaçant le diviseur $1 + \frac{dv}{v}$ par l'unité,

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

ou encore

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

En particulier, pour $u = a =$ const., on a [258]

$$d\frac{a}{v} = -\frac{a\,dv}{v^2}.$$

De cette dernière formule, établie directement, on tirerait [261]

$$dy = d\left(u\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}du + u\,d\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$$

ou bien encore, par la règle des fonctions implicites [254], on aurait

$$vy = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{v} + \frac{dv}{y} = \frac{du}{u}, \quad \text{etc.}$$

On conclut de là, réciproquement,

$$\int \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{u}{v} + C.$$

264. *Différentielle d'une puissance.* — Soit, pour m entier et positif,

$$y = x^m \quad (m > 1);$$

on en tire [261]

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \ldots + \frac{dx}{x} = m\frac{dx}{x},$$

d'où

$$dy = mx^{m-1}dx. \tag{1}$$

Pour m fractionnaire $= \frac{p}{q}$, on a [252]

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \quad y^q = x^p,$$

d'où

$$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Donc la formule (1) subsiste pour $m = \frac{p}{q}$. On voit, par le raisonnement connu, qu'elle subsistera encore lorsqu'on fera tendre $\frac{p}{q}$

vers une valeur incommensurable quelconque. Donc la formule (1) est vraie pour toute valeur positive de m.

Pour m négatif $= -n$, on a [263]

$$d\frac{1}{x^n} = \frac{d(x^n)}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}dx,$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = \text{etc.},$$

ou bien, par la règle des fonctions implicites [254],

$$\frac{dy}{dx} = -1, \quad \text{ou} \quad \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}dx, \quad \text{etc.}$$

En particulier,

$$d\sqrt{x} = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x}.$$

265. Réciproquement,

$$\int mx^{m-1}dx = m\int x^{m-1}dx = x^m + C,$$

d'où, en changeant $m-1$ en n, et écrivant C au lieu de $\frac{C}{n+1}$,

$$(2) \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

En particulier, pour $n = -\frac{1}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

La formule générale (2) est en défaut pour $n = -1$. Nous verrons plus loin ce qu'elle devient dans ce cas.

266. *Différentielle d'une exponentielle.* — Soit a un nombre positif, et soit

$$y = a^x.$$

On en tirera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^{dx} - 1}{dx} a^x,$$

ou, en posant l'infiniment petit $a^{dx} - 1 = \varepsilon$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^x}{L_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

L_a désignant un logarithme relatif à la base a. Il reste ainsi à calculer la limite vers laquelle tend la quantité

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

lorsque dx et par suite aussi ε tendent vers zéro.

Supposons d'abord $\varepsilon = \frac{1}{m}$, m étant un nombre entier et positif. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(m-1)m}\frac{1}{m^m} \\
&= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{1.2\ldots p}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right) + \ldots \\
&< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m} \\
&< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} \\
&< \lim_{n=\infty}\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire < 3. On a donc, quel que soit le nombre $m > 1$,

$$2 < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

De plus, lorsqu'on fait croître m, chaque terme du développement est remplacé par un terme de même rang, plus grand en valeur numérique, et en même temps le nombre des termes est augmenté. Donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ croît continuellement avec m. Donc, pour m croissant indéfiniment, cette fonction tend vers une certaine limite,

comprise entre 2 et 3, et que l'on désigne habituellement par la lettre e. On peut déterminer approximativement cette limite, en donnant à m des valeurs de plus en plus grandes. On trouve ainsi

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2,59\ldots,\quad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,70\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,716\ldots,\ldots.$$

En continuant ainsi, ou en employant des moyens plus rapides que nous indiquerons plus tard, on trouve

$$e=2,718281828\ldots.$$

Soit maintenant un nombre μ positif et non entier, et soient m et $m+1$ les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels μ est compris. On a

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1},$$

et, comme on voit aisément que

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}=e,$$

on en conclut aussi

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=e.$$

Si enfin m est négatif, on a, en faisant $m=-n$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n},$$

dont la limite est encore e.

Donc, pour toute valeur infiniment grande de m, c'est-à-dire pour toute valeur infiniment petite de ε, on a

$$\lim_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e;$$

par conséquent,

$$D_x a^x=\frac{1}{L_e e}a^x.$$

On a d'ailleurs, en désignant par la notation log les logarithmes pris dans le système dont la base est e,

$$a = e^{\log a},$$

d'où, en prenant les logarithmes relatifs à la base a,

$$1 = L_a e \log a, \quad \frac{1}{L_a e} = \log a.$$

Le nombre

$$L_a e = \frac{1}{\log a} = M_a$$

est dit le *module* des logarithmes du système dont la base est a. On trouve, pour $a = 10$, en écrivant simplement M au lieu de M_{10},

$$M = L_{10} e = \frac{1}{\log 10} = 0,43429448\ldots,$$

valeur dont l'inverse est

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{L_{10} e} = \log 10 = 2,30258509\ldots.$$

D'après cette notation, on a

$$D_x . a^x = a^x \log a = \frac{a^x}{M_a},$$

$$d . a^x = a^x \log a . dx = \frac{a^x dx}{M_a}.$$

En particulier, pour $a = e$,

$$D_x . e^x = e^x, \quad d . e^x = e^x dx.$$

On voit par là que la fonction e^x jouit de la propriété remarquable de se reproduire elle-même par la différentiation.

267. Réciproquement, on a les formules d'intégration

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C = M_a a^x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

On tire de là les intégrales définies

$$\int_0^x a^v dx = \frac{a^x - 1}{\log a}, \qquad \int_0^x e^v dx = e^x - 1,$$

$$\int_\infty^x a^v dx = -\frac{a^x}{\log a}, \qquad \int_x^\infty e^v dx = e^x.$$

268. *Différentielle d'un logarithme.* — Pour

$$y = \mathrm{L}_a x,$$

la règle des fonctions inverses [251] donne

$$x = a^y, \qquad dx = \frac{a^y}{\mathrm{M}_a} dy = \frac{x}{\mathrm{M}_a} dy,$$

$$dy = \mathrm{M}_a \frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{D}_x \mathrm{L}_a x = \frac{\mathrm{M}_a}{x}.$$

Si l'on suppose $a = e$, il vient

$$d \log x = \frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{D}_x \log x = \frac{1}{x}.$$

On peut aussi établir ces formules directement. On a

$$d.\mathrm{L}x = \mathrm{L}\left(1 + \frac{dx}{x}\right),$$

ou, en posant $\frac{dx}{x} = \varepsilon$, d'où $dx = \varepsilon x$,

$$\frac{d.\mathrm{L}x}{dx} = \frac{\mathrm{L}(1+\varepsilon)}{\varepsilon x} = \frac{1}{x} \mathrm{L}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

On a donc, en passant à la limite [266],

$$\mathrm{D}_x \mathrm{L}x = \frac{\mathrm{L}e}{x}.$$

269. On peut tirer de ces formules diverses conséquences importantes. Si l'on suppose *dx très-petit*, et que l'on puisse négliger des quantités aussi petites par rapport à dx que dx l'est par rapport à l'unité, on aura, pour l'*accroissement relatif* de x [261], l'expression

$$\frac{dx}{x} = \frac{d.\mathrm{L}_a x}{\mathrm{M}_a} = d \log x.$$

Donc, si dx est l'erreur absolue de x, l'erreur relative $\frac{dx}{x}$ de x sera égale à l'erreur absolue de $\log_e$ de x, ou proportionnelle à l'erreur absolue de $L_a x$.

270. De la formule

$$\lim \frac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = e^x$$

on tire, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1,$$

ou, δ étant un infiniment petit,

$$\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1 + \delta,$$

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \varepsilon\delta.$$

Donc, pour ε *très-petit*, e^ε est égal à $1 + \varepsilon$, à une quantité près $\varepsilon\delta$, très-petite du second ordre, formule très-utile dans les calculs d'approximation.

Il en résulte, à une erreur près du second ordre,

$$x^\varepsilon = e^{\log x^\varepsilon} = 1 + \varepsilon \log x.$$

De même, de la formule

$$\lim \frac{\log(x + \varepsilon) - \log x}{\varepsilon} = \frac{1}{x}$$

on tire, pour $x = 1$,

$$\frac{\log(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = 1 + \delta,$$

d'où, à une quantité près du second ordre $\varepsilon\delta$,

$$\log(1 + \varepsilon) = \varepsilon.$$

Dans le système dont le module est M, le rapport $\frac{d.Lx}{dx}$, pour $x = 1$, est égal à M. Dans le système décimal, ce rapport est donc égal à 0,434..., comme on le voit en jetant un coup d'œil sur une Table de logarithmes.

Remarquons encore la formule

$$\lim (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim \left[(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^2 = e^2.$$

271. On a

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{x} = d \log x = d \log(-x),$$

suivant que x est positif ou négatif. Mais nous verrons plus loin [371] que, k étant un entier quelconque, on a

$$\log(-x) = \log x + 2k(\pi\sqrt{-1}).$$

Cela explique pourquoi $\log(+x)$ et $\log(-x)$, différant par une constante, ont la même dérivée. On pourra donc, quel que soit le signe de x, écrire

$$d \log x = \frac{dx}{x}.$$

Si u et v sont deux quantités de signes quelconques, égales ou simplement proportionnelles, c'est-à-dire si l'on a

$$u = Cv, \quad \text{ou} \quad u = Cv,$$

C étant une constante réelle ou complexe, il en résultera toujours

$$\text{(A)} \qquad \frac{du}{u} = \frac{dv}{v}.$$

Réciproquement, de cette dernière équation on conclut que les logarithmes des valeurs absolues de u et de v, ayant la même dérivée, ne diffèrent que par une constante, laquelle peut être représentée par $\log(\pm C)$. Donc

$$\log u = \log v + \log(\pm C) = \log v + \log C + \log \pm 1 = \log Cv + \log \pm 1,$$

d'où, en écrivant simplement C au lieu de $\pm C$, on conclut

$$u = Cv.$$

On peut encore démontrer autrement cette relation. L'équation (A), multipliée par $\frac{u}{v}$, donne

$$\frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = d\frac{u}{v} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{v} = C.$$

272. Étant donné un produit

$$y = uvw\ldots,$$

on a

$$\log y = \log u + \log v + \log w + \ldots.$$

d'où l'on tire, comme au n° **261**,

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots.$$

De même,

$$\text{pour } y = \frac{u}{v}, \quad \log y = \log u - \log v, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \text{ [263]};$$

$$\text{pour } y = u^m, \quad \log y = m \log u, \quad \frac{dy}{y} = m\frac{du}{u} \text{ [264]}.$$

On voit que le calcul de la différentielle d'un produit ou d'un quotient peut être simplifié, en différentiant le logarithme de ce produit ou de ce quotient. Ce procédé, très-employé dans la pratique du calcul, porte le nom de *différentiation logarithmique*.

273. On tire, réciproquement, des formules précédentes,

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log Cx,$$

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x, \quad \int_a^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a}.$$

274. On peut maintenant déduire la formule d'intégration du numéro précédent de la formule qui donne $\int x^m dx$, en cherchant la limite de cette intégrale pour m tendant vers -1. Soit

$$m = -1 - \varepsilon.$$

On a, en désignant par a un nombre quelconque *de même signe* que x $\left(\text{sans quoi } \frac{1}{x} \text{ passerait par } \infty \text{ lorsque } x \text{ varie de la valeur } a \text{ à la valeur } x\right)$,

$$\int x^m dx = \int_a^x x^{-1+\varepsilon} dx + C = \frac{x^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon} + C.$$

D'ailleurs, α et β étant des infiniment petits, on a [270]

$$x^\varepsilon = 1 + \varepsilon \log x (1 + \alpha), \quad a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \log a (1 + \beta),$$

d'où

$$\frac{x^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \log x (1 + \alpha) - \varepsilon \log a (1 + \beta)}{\varepsilon} = \log \frac{x}{a} + \alpha \log x - \beta \log a,$$

le terme infiniment grand $\frac{1}{\varepsilon}$ ayant disparu; donc

$$\int x^{-1} dx = \lim \frac{x^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon} + C = \log \frac{x}{a} + C = \log x + C'.$$

275. *Différentielles des fonctions hyperboliques.* — On appelle *fonctions hyperboliques* des combinaisons d'exponentielles qui jouent dans la théorie de l'hyperbole équilatère un rôle analogue à celui des fonctions goniométriques dans la théorie du cercle. On donne les noms de *sinus hyperbolique,* de *cosinus hyperbolique,* de *tangente hyperbolique,* de *cotangente hyperbolique* aux fonctions

$$\mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{Th}\, x = \frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

$$\mathrm{Cth}\, x = \frac{\mathrm{Ch}\, x}{\mathrm{Sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Ces fonctions satisfont aux relations

$$\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x = e^x, \quad \mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x = e^{-x},$$

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1, \quad \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x} + 1 = \mathrm{Th}^2 x, \quad \frac{1}{\mathrm{Sh}^2 x} + 1 = \mathrm{Cth}^2 x,$$

$$\mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\, x, \quad \mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\, x, \quad \mathrm{Th}(-x) = -\mathrm{Th}\, x,$$

$$\mathrm{Sh}\, 0 = 0, \quad \mathrm{Ch}\, 0 = 1, \quad \mathrm{Th}\, 0 = 0,$$

$$\mathrm{Sh}\, \infty = \infty, \quad \mathrm{Ch}\, \infty = \infty, \quad \mathrm{Th}\, \infty = 1.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} e^{\pm(x+y)} &= \mathrm{Ch}(x+y) \pm \mathrm{Sh}(x+y) \\ &= e^{\pm x} e^{\pm y} = (\mathrm{Ch}\, x \pm \mathrm{Sh}\, x)(\mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, y) \\ &= \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y \pm (\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y), \end{aligned}$$

d'où l'on tire les formules d'addition des arguments

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sh}\,y,$$
$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}\,y.$$

En faisant $y = x$, $2x$, ..., on obtient les formules pour la multiplication des arguments

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}\,2x = \mathrm{Ch}^2 x + \mathrm{Sh}^2 x = 2\,\mathrm{Ch}^2 x - 1 = 2\,\mathrm{Sh}^2 x + 1,\\
&\mathrm{Sh}\,2x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x,\\
&\mathrm{Ch}\,3x = 4\,\mathrm{Ch}^3 x - 3\,\mathrm{Ch}\,x,\\
&\mathrm{Sh}\,3x = 4\,\mathrm{Sh}^3 x + 3\,\mathrm{Sh}\,x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit sans peine l'analogie qui existe entre ces formules et celles qui expriment les propriétés des fonctions circulaires. Nous donnerons bientôt la raison de cette analogie, et la règle générale pour passer des formules relatives à l'une de ces classes de fonctions aux formules relatives à l'autre classe.

276. Les limites entre lesquelles varient les fonctions hyperboliques

$$\mathrm{Ch}\,x, \quad \mathrm{Sh}\,x, \quad \mathrm{Th}\,x$$

sont respectivement les mêmes que celles entre lesquelles varient les fonctions circulaires

$$\sec\varphi, \quad \mathrm{tang}\,\varphi, \quad \sin\varphi,$$

l'angle φ variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

De plus les relations qui existent entre les premières sont respectivement identiques à celles qui existent entre les secondes. On conclut de là que l'une quelconque des trois relations

$$\mathrm{Ch}\,x = \sec\varphi, \quad \mathrm{Sh}\,x = \mathrm{tang}\,\varphi, \quad \mathrm{Th}\,x = \sin\varphi$$

entraîne les deux autres.

On a alors

$$e^x = \mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x = \sec\varphi + \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

d'où résultent les équations

$$x = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\varphi = 2 \operatorname{arc\,tang} e^x - \frac{\pi}{2},$$

qui expriment la relation qui existe entre les deux variables x et φ. Nous donnerons à l'angle φ le nom d'*amplitude hyperbolique* de l'argument x, et nous le désignerons par le symbole

$$\varphi = \operatorname{Amh} x.$$

Si l'on a formé une Table des valeurs de x correspondantes aux valeurs de φ, de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on pourra, à l'aide de cette Table, trouver dans les Tables trigonométriques ordinaires les valeurs, naturelles ou logarithmiques, des fonctions hyperboliques d'un argument quelconque x. Il suffit ainsi, pour transformer une Table de fonctions circulaires en Table de fonctions hyperboliques, d'ajouter, à côté de chaque valeur de l'argument φ de la Table trigonométrique, la valeur correspondante de

$$x = \log \text{nat. } \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

que l'on trouve toute calculée dans les Tables de Neper ou de B. Ursinus, ou encore la valeur de $Mx = \log \text{vulg. } \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, que l'on peut emprunter à la Table trigonométrique elle-même.

277. Cela posé, en différentiant les valeurs ci-dessus des fonctions hyperboliques, on trouve directement

$$D_x \operatorname{Sh} x = \operatorname{Ch} x, \quad D_x \operatorname{Ch} x = \operatorname{Sh} x,$$

$$D_x \operatorname{Th} x = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}, \quad D_x \operatorname{Cth} x = -\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x}.$$

On en conclut, réciproquement,

$$\int \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} x + C, \quad \int \operatorname{Sh} x\, dx = \operatorname{Ch} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Th} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Cth} x + C.$$

278. *Différentielles des fonctions hyperboliques inverses.* — Désignons par

$$\operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x, \quad \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x, \quad \operatorname{Arg}\operatorname{Th} x, \quad \ldots \quad (^1)$$

les quantités dont x est le sinus hyperbolique, le cosinus hyperbolique, la tangente hyperbolique, ... De l'équation

$$y = \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x, \quad \text{ou} \quad x = \operatorname{Sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

on tire

$$y = \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

On a de même

$$\operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arg}\operatorname{Th} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad (x^2 < 1),$$

$$\operatorname{Arg}\operatorname{Cth} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, \quad (x^2 > 1).$$

L'équation $x = \operatorname{Sh} y$ donne

$$dx = \operatorname{Ch} y\, dy = \sqrt{\operatorname{Sh}^2 y + 1}\,.\,dy = \sqrt{x^2 + 1}\,.\,dy,$$

d'où

$$D_x \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x = D_x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x + C.$$

L'équation $x = \operatorname{Ch} y$ donne

$$dx = \operatorname{Sh} y\, dy = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - 1}\,.\,dy = \sqrt{x^2 - 1}\,.\,dy;$$

d'où (x étant > 1)

$$D_x \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x = D_x \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x + C.$$

---

(1) Argument sinus hyperbolique x, etc.

L'équation $x = \mathrm{Th}\,y$ donne

$$dx = \frac{dy}{\mathrm{Ch}^2 y} = (1 - \mathrm{Th}^2 y)\,dy = (1 - x^2)\,dy,$$

d'où, pour $x^2 < 1$,

$$\mathrm{D}_x \operatorname{Arg}\mathrm{Th}\,x = \mathrm{D}_x \cdot \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg}\mathrm{Th}\,x + \mathrm{C}.$$

L'équation $x = \mathrm{Cth}\,y$ donne

$$dx = \frac{dy}{\mathrm{Sh}^2 y} = (1 - \mathrm{Cth}^2 y)\,dy = (1 - x^2)\,dy,$$

donc, pour $x^2 > 1$,

$$\mathrm{D}_x \operatorname{Arg}\mathrm{Cth}\,x = \mathrm{D}_x \cdot \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \operatorname{Arg}\mathrm{Cth}\,x + \mathrm{C}.$$

279. *Différentielles des fonctions circulaires.* — Soit $y = \sin x$; on a

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x = 2\sin\frac{dx}{2}\cos\left(x + \frac{dx}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{1}{2}dx}{\frac{1}{2}dx}\cos\left(x + \frac{dx}{2}\right);$$

en passant à la limite et remarquant que, pour ε infiniment petit, $\lim\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$, il vient

$$\mathrm{D}_x \sin x = \cos x, \quad d\sin x = \cos x\,dx,$$

d'où, réciproquement,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathrm{C}.$$

On trouvera de la même manière, directement,

$$\mathrm{D}_x \cos x = -\sin x, \quad d\cos x = -\sin x\,dx,$$

formules qui résultent encore de ce que

$$d\cos x = d\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\,dx \text{ [253]}.$$

On en tire, réciproquement,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Pour $y = \operatorname{tang} x$, on a

$$dy = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} dx}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} dx} - \operatorname{tang} x = \frac{(1 + \operatorname{tang}^2 x)\operatorname{tang} dx}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{séc}^2 x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} dx} \frac{\operatorname{tang} dx}{dx},$$

d'où, à cause de $\lim_{z=0} \frac{\operatorname{tang} z}{z} = 1$,

$$D_x \operatorname{tang} x = \operatorname{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d\operatorname{tang} x = \operatorname{séc}^2 x\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On pourrait encore établir cette formule [263], en partant de l'équation $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On en tire, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C.$$

On trouverait, soit par un raisonnement direct analogue, soit en partant de la formule $\cot x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou encore de la formule $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$,

$$D_x \cot x = -\operatorname{coséc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad d\cot x = -\operatorname{coséc}^2 x\,dx = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

d'où l'on tire, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

On trouverait de même

$$D_x \operatorname{séc} x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad D_x \operatorname{coséc} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

d'où, réciproquement,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x + C, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

280. *Différentielles des fonctions circulaires inverses.* — Soit

$$y = \text{arc}\sin x, \quad \text{d'où} \quad x = \sin y.$$

On a (278)

$$dx = \cos y\,dy = \sqrt{1 - \sin^2 y}\,dy = \sqrt{1 - x^2}\,dy,$$

d'où

$$d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc}\sin x + C.$$

Ces formules sont vraies à la condition que arc sin x désigne un arc dont le cosinus soit positif, et pourvu qu'en même temps la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ reste continue dans l'intervalle des limites de l'intégration. C'est ce qui a lieu, lorsqu'on suppose l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, limites entre lesquelles $\sin y$ passe par toutes les valeurs dont il est susceptible.

De même, pour $y = \text{arc}\cos x$, on trouvera

$$d\,\text{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\text{arc}\cos x + C.$$

Cette formule suppose $\cos y$ croissant en sens contraire de y, et, par suite, y compris entre zéro et π. C'est d'ailleurs ce qui résulte de l'équation

$$\cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x,$$

ou, en passant aux arcs,

$$y = \text{arc}\cos x, \quad \frac{\pi}{2} - y = \text{arc}\sin x, \quad \text{arc}\sin x + \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2},$$

équation qui donne $d\,\text{arc}\cos x = -d\,\text{arc}\sin x$.

Remarquons que la fonction arc cos x, s'évanouissant pour $x=1$, sera exprimée par l'intégrale définie

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos}\, x.$$

On voit ici un exemple d'une intégrale qui reste finie et déterminée, quoique la fonction sous le signe $\int$ devienne infinie pour la limite inférieure.

On a donc, par ce que l'on vient de voir,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x\right) + C = -\text{arc cos}\, x + C'.$$

Soit maintenant $y = \text{arc tang}\, x$, d'où $x = \text{tang}\, y$,

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = (1 + \text{tang}^2 y)\, dy = (1 + x^2)\, dy,$$

$$d\,\text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

On pourra prendre, pour arc tang x comme pour arc sin x, la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, tang y passant, dans cet intervalle, par toutes les valeurs possibles.

On trouverait de même, soit directement, soit au moyen de l'équation arc tang x + arc cot $x = \frac{\pi}{2}$,

$$d\,\text{arc cot}\, x = -d\,\text{arc tang}\, x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

arc cot x étant supposé pris entre zéro et π.

On a donc, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C = -\text{arc cot}\, x + C',$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, \infty = \frac{\pi}{2}.$$

On obtiendrait de la même manière d arc sécx x, d arc cosec x, et les intégrales qui en résultent réciproquement.

281. *Exemples divers de différentiation.* — I. Soit la fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}.$$

On a [261, 265]

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1 \pm x^2} = \frac{dx}{x(1 \pm x^2)}, \quad \text{d'où} \quad dy = -\frac{dx}{(1 \pm x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{(1 \pm x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1 \pm x^2}} + C.$$

II. Pour $y = u^v$, on a

$$\log y = v \log u, \quad \frac{d \log y}{\log y} = \frac{d \log u}{\log u} + \frac{dv}{v},$$

$$\frac{dy}{y} = v \log u \left\{ \frac{du}{u \log u} + \frac{dv}{v} \right\}, \quad dy = u^v \left\{ v \frac{du}{u} + \log u \, dv \right\}.$$

En particulier, pour $y = x^x$, $\log y = x \log x$, on trouve

$$dy = x^x (1 + \log x) \, dx.$$

On aura de la même manière

$$dy = u^{v^w} \left[v^w \frac{du}{u} + \log u \, d v^w \right] \text{ etc.},$$

$$dy = x^{x^{x^x}} (1 + x \log x + \log x^2) \, dx,$$

et ainsi de suite.

III. On trouve aisément

$$d \log \sin x = \frac{dx}{\operatorname{tang} x}, \quad d \log \cos x = -\frac{dx}{\cot x},$$

d'où, réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang} x} = \log \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cot x} = \log \sec x + C.$$

On a encore

$$d.\log \operatorname{tang} x = \frac{2dx}{\sin 2x}, \quad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\log \operatorname{tang} x + C.$$

En changeant x en $\frac{1}{2}x$, on a

$$d.\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}x = \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}x + C.$$

et enfin, en changeant x en $\frac{\pi}{2} + x$,

$$d.\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{\cos x}\ [1],$$

d'où

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right) + C.$$

§ VII.

MÉTHODES GÉNÉRALES D'INTÉGRATION.

282. *Intégration immédiate.* — Nous avons trouvé, dans le paragraphe précédent, en renversant l'opération de la différentiation, les principales formules d'intégration immédiate, que nous récapitulons dans le tableau suivant :

Soient a une constante donnée, C une constante arbitraire, u, v, ... des fonctions de la variable x. On a

$$\int (u + v + \ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int au\,dx = a\int u\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log(C'x),$$

$$\int (u\,dv + v\,du) = uv + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

[1] Cette formule donne [276] la différentielle de l'argument u dont l'amplitude hyperbolique est x,

$$du = \frac{dx}{\cos x}, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\int \frac{a\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C;$$

$$\int \operatorname{Sh} x\,dx = \operatorname{Ch} x + C, \qquad \int \operatorname{Ch} x\,dx = \operatorname{Sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Th} x + C \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Ch} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x + C = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x + C = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} x + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + C \quad \text{pour } x^2 < 1$$

$$= \operatorname{Arg}\operatorname{Cth} x + C = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} + C \quad \text{pour } x^2 > 1,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C = \operatorname{arc\,cos} x + C',$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C = -\operatorname{arc\,cot} x + C'.$$

283. *Intégration par substitution.* — Si l'on sait calculer l'intégrale

$$\int f(t)\,dt = F(t),$$

en remplaçant t par $\varphi(x)$, on aura (252)

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)].$$

Si donc on propose de calculer une intégrale $\int \varpi(x)\,dx$, et que l'on puisse mettre la fonction $\varpi(x)$ sous la forme $f[\varphi(x)].\varphi'(x)$, f désignant la dérivée d'une fonction connue F, on saura déterminer l'intégrale proposée.

Si l'on a à calculer une intégrale définie $\int_{x_0}^{X} \varpi(x)\,dx$, il faudra déterminer les limites t_0 et T de l'intégrale transformée

$\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt$, au moyen des relations

$$t_0 = \varphi(x_0), \quad T = \varphi(X).$$

Exemples. — I. Soit l'intégrale

$$\int f(x+a)\,dx.$$

En posant $x + a = t$, elle deviendra $\int f(t)\,dt$, et, si cette dernière intégrale a pour valeur $F(t)$, on en conclura que la proposée a pour valeur $F(x+a)$.

Si l'intégrale proposée doit être prise entre les limites x_0 et X, en remarquant alors que l'on a, pour $x = x_0$, $t = x_0 + a$, et pour $x = X$, $t = X + a$, il viendra [242]

$$\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(t)\,dt = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)\,dx.$$

II. Soit l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. Si l'on pose

$$t = X - x,$$

d'où

$$dt = -dx, \quad t_0 = X - x_0, \quad T = 0,$$

il vient

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X-x_0}^{0} f(X-t)\,dt,$$

ou, en intervertissant les limites [244] et changeant, sous le signe $\int$, t en x [242],

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{0}^{X-x_0} f(X-x)\,dx.$$

Cette formule, qui nous sera utile plus tard, peut se démontrer

Fig. 21.

géométriquement, en considérant l'intégrale proposée comme représentant l'aire de la courbe $y = f(x)$ (*fig.* 21), comprise entre

les abscisses x_0 et X. Si l'on désigne par t la différence $X - x_0$, l'élément d'aire aura pour valeur $f(X - t)\,dt$, et l'on voit que t devra varier depuis o jusqu'à $X - x_0$.

III. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \ldots}} = \arcsin x + C$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

IV. $$\int \frac{dx}{x^2 + \ldots} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}},$$

d'où, en prenant $z = x + \frac{a}{2}$, il vient, pour $b - \frac{a^2}{4} > 0$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + \ldots} = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} + \ldots,$$

et (278), pour $b - \frac{a^2}{4} < 0$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + \ldots} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} \log \frac{x + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}{x + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} + C.$$

V. On a de même les formules générales suivantes :

$$\int f'(x)\,f(x)^n\,dx = \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + C,$$

$$\int f(x)\,a^{f(x)}\,a'(x)\,dx = \frac{1}{\log a} f(x)\,a^{f(x)} + C,$$

$$\int f'(x) \log x \frac{dx}{x} = f(x) \log x - f(x) + C,$$

$$\int f'(x) \cos x \sin x\,dx = f(x) \cos x + C,$$

$$\int f'(\sin x) \cos x\,dx = f(\sin x) + C,$$

$$\int f'(x) \operatorname{tang} x \frac{dx}{\cos^2 x} = f(x) \operatorname{tang} x + C,$$

$$\int f'(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = f(\arcsin x) + C,$$

etc....

VI. Supposons que la fonction $f(x)$ se décompose en deux facteurs, $\varphi(x)$ et $\varpi(x)$, dont le second conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et X de l'intégration. Si $\Pi(x)$ est la fonction qui a pour dérivée $\varpi(x)$, et que l'on pose $\Pi(x) = t$, la différentielle $dt = \varpi(x)dx$ de cette fonction sera toujours de même signe, comme on suppose essentiellement que cela a toujours lieu pour la différentielle de la variable indépendante sous le signe $\int$. On pourra donc transformer l'intégrale en prenant t pour variable indépendante, et faisant varier t depuis $t_0 = \Pi(x_0)$ jusqu'à $T = \Pi(X)$. En désignant donc par $\Phi(t)$ ce que devient $\varphi(x)$ lorsqu'on met pour x sa valeur en t, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ deviendra

$$\int_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt.$$

Mais cette intégrale est égale [247] au produit de la différence des limites $T - t_0$ par une valeur moyenne de $\Phi(t)$ ou de $\varphi(x)$. D'ailleurs, $\Pi(x) = t$ étant l'intégrale indéfinie de $\varpi(x)$,

$$T - t_0 = \Pi(X) - \Pi(x_0)$$

sera égal [241] à l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} \varpi(x)dx$. Donc enfin on a la formule importante

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\varpi(x)\,dx = \mathfrak{M}\varphi(x) \cdot \int_{x_0}^{X} \varpi(x)\,dx,$$

ou, si la fonction $\varphi(x)$ est continue, et que l'on désigne par ξ une valeur moyenne de x,

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\varpi(x)\,dx = \varphi(\xi) \cdot \int_{x_0}^{X} \varpi(x)\,dx.$$

On pourrait aussi démontrer cette formule directement. L'intégrale $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\varpi(x)dx$ est la limite de la somme [236]

$$\varphi(x_0) \cdot \varpi(x_0)dx_0 + \varphi(x_1) \cdot \varpi(x_1)dx_1 + \ldots + \varphi(x_{n-1}) \cdot \varpi(x_{n-1})dx_{n-1}.$$

Or, d'après le théorème déjà cité [195], les facteurs $\varpi(x_0)dx_0$, $\varpi(x_1)dx_1, \ldots$ étant tous de même signe, la somme précédente est égale à la somme de ses seconds facteurs,

[illegible]

qui a pour limite $\int_a^b [illegible]\,dx$, multipliée par une moyenne $\mathfrak{M}\varphi(x)$ entre les premiers facteurs, ce qui démontre la formule (2).

Si l'on y fait [illegible] on trouvera la formule du n° 247

[illegible]

On a ainsi deux formules dont chacune est contenue dans l'autre.

284. *Intégration par décomposition.* — Ce procédé, sur lequel nous reviendrons plus tard, est fondé sur la formule

[illegible]

Il consiste à décomposer la fonction que l'on veut intégrer en parties que l'on sache intégrer séparément.

Exemples. — I. On a

[illegible]

II. [illegible]

[illegible]

III. Soit proposé de calculer

[illegible]

n étant entier et positif. Faisons $a + bx = y$, d'où $dx = \frac{dy}{b}$,

$$\int \frac{x^n dx}{(a + bx)^m} = \int \frac{(y - a)^n dy}{b^{n+1} y^m} = \frac{1}{b^{n+1}} \int \left(y^{n-m} - na y^{n-m-1} + \ldots\right) dy,$$

ce qui conduit à l'intégrale d'un polynôme d'un nombre fini de termes.

IV. Soit maintenant l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x^m (a + bx^n)^m}.$$

En posant $x = \frac{1}{t}$, d'où $dx = -\frac{dt}{t^2}$, cette intégrale deviendra

$$-\int \frac{t^{2m-2} dt}{(b + at^n)^m},$$

et se ramènera au cas précédent, si $n + m$ est entier et ≥ 2.

V. $\int \mathrm{Th}^2 x\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{\mathrm{Ch}^2 x} = x - \mathrm{Th}\, x + \mathrm{C}.$

285. *Intégration par parties.* — De la formule

$$\int (v\,du + u\,dv) = \int v\,du + \int u\,dv = uv$$

on tire [262]

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Étant donc proposée une intégrale $\int f(x)dx$, si l'on décompose $f(x)$ en deux facteurs de la forme $\varphi(x).\chi'(x)$, la formule précédente deviendra

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\chi'(x)\,dx = \varphi(x)\chi(x) - \int \chi(x)\varphi'(x)\,dx,$$

formule qui ramène la recherche de l'intégrale proposée à celle de l'intégrale

$$\int \chi(x)\varphi'(x)\,dx = \int \chi(x)\,d\frac{f(x)}{\chi'(x)},$$

quelle que soit la fonction χ.

Exemples. — I. On trouve ainsi

$$\int x \log x \, dx = \int \log x \, d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \, d \log x$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x \, dx}{2} = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

II. $$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = \int x \, d \operatorname{tang} x = x \operatorname{tang} x - \int \operatorname{tang} x \, dx$$

$$= x \operatorname{tang} x - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \operatorname{tang} x - \log \cos x + C.$$

III. $$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int \sin x \, d x^2 = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx,$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C,$$

d'où

$$\int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2 x \cos x + C.$$

IV. L'intégration par parties donne successivement

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

De ces deux équations on tire

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

§ VIII.

DÉRIVÉES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

286. La dérivée $y' = f'(x)$ d'une fonction $y = f(x)$, étant elle-même une fonction de x, a aussi, en général, une dérivée que l'on appelle la *dérivée du second ordre* ou la *dérivée seconde* de la fonction proposée $f(x)$. On la représente par l'un des symboles

$$D_x^2 y, \quad D_x^2 f(x), \quad y'', \quad f''(x).$$

De même, $y'' = f''(x)$, étant une fonction de x, a elle-même

une dérivée

$$D_x^2 f(x) = D_x^2 f(x) = D_x f'(x) = D_x f''(x) = D_x^2 f'(x),$$

que l'on appelle la *dérivée du troisième ordre* ou la *dérivée troisième* de la fonction $f(x)$, et ainsi de suite. On formera ainsi successivement la dérivée $n^{\text{ième}}$

$$D_x^n f(x) = D_x f^{(n-1)}(x) = D_x^2 f^{(n-2)}(x) = \ldots.$$

On voit, d'après la manière dont les dérivées se déduisent les unes des autres, que l'on a, k étant un nombre quelconque moindre que n,

$$D_x^n f(x) = D_x^k D_x^{n-k} f(x) = D_x^k D_x^{n-k} f(x) = D_x^k f^{(n-k)}(x) = D_x^{n-k} f^{(k)}(x),$$

ce qui constitue la propriété associative de l'opération D_x. On voit ainsi que les opérations de dérivation répétées se combinent par la règle de la multiplication des puissances d'un monôme. On peut, pour cette raison, considérer la dérivation comme une *multiplication par* D_x.

287. Si a est un facteur constant, on aura évidemment

$$D_x^n (a f(x)) = a . D_x^n f(x).$$

Donc la dérivation et la multiplication par un facteur constant sont deux opérations commutatives entre elles, ce que l'on exprime par l'égalité [11]

$$D_x (a \times u) = a \times D_x u.$$

Si a était fonction de x, cette égalité n'aurait plus lieu, et les opérations D_x et $\times$ ne seraient plus commutatives.

De plus, on a

$$D_x^n (u + v + \ldots) = D_x^n u + D_x^n v + \ldots.$$

Donc l'opération D_x est distributive relativement à l'addition, par rapport à la quantité qui lui est soumise.

Soit maintenant une expression de la forme

$$X = a D_x^m u + b D_x^n u + \ldots,$$

$a, b, \ldots$ étant des quantités quelconques, fonctions de x ou con-

stantes. On pourra poser

$$X = aD_x^m + bD_x^n + \ldots = \varphi(D_x)u,$$

en définissant la fonction φ par l'égalité

$$\varphi(t) = at^m + bt^n + \ldots.$$

Si l'on remplace maintenant u par une somme $u + v + \ldots$, on verra immédiatement que l'on a

$$\varphi(D_x)(u + v + \ldots) = \varphi(D_x)u + \varphi(D_x)v + \ldots$$

c'est-à-dire que l'opération $\varphi(D_x)$ est distributive relativement à l'addition, par rapport à la quantité qui lui est soumise.

Si la somme $u + v + \ldots$ est de la forme

$$\chi(D_x)z = \alpha D_x^n z + \beta D_x^p z + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \ldots$ étant des *constantes*, on aura

$$\varphi(D_x)\chi(D_x)z = \varphi(D_x)\chi(D_x)z,$$

la combinaison $\varphi(D_x).\chi(D_x)$ se calculant par la règle de la multiplication des polynômes.

Si les coefficients $a, b, \ldots$ de la fonction φ sont constants comme ceux de la fonction χ, le calcul de l'expression

$$\chi(D_x)\varphi(D_x)z = \chi(D_x).\varphi(D_x)z,$$

exécuté aussi par la règle de la multiplication des polynômes, conduira au même résultat que le précédent. Donc, si φ et χ sont les signes de deux fonctions entières et rationnelles *à coefficients constants,* les deux opérations $\varphi(D_x), \chi(D_x)$ seront commutatives.

On verrait aisément qu'une opération telle que $\varphi(D_x)$, où les coefficients sont constants, est associative. Elle est déjà distributive relativement à l'addition, par rapport à la quantité soumise à cette opération; on voit, de plus, qu'elle est distributive, dans la combinaison de deux semblables opérations, tant par rapport au premier terme que par rapport au second, c'est-à-dire qu'elle est complétement distributive, de sorte qu'un produit, tel que

$$[\varphi(D_x) + \chi(D_x) + \ldots].[\varphi_1(D_x) + \chi_1(D_x) + \ldots],$$

se calcule par la règle de la multiplication des polynômes.

Il ne faut pas oublier que la commutativité de l'opération et ses conséquences ne subsisteraient plus si les coefficients des puissances de D_x dans les polynômes φ, χ, ... n'étaient pas tous constants.

288. Avant de nous occuper du calcul direct des dérivées d'ordre quelconque, présentons quelques remarques, qui seront surtout utiles lorsqu'on devra calculer les valeurs des diverses dérivées, correspondantes à la valeur zéro de la variable.

On appelle fonction *paire* de la variable x une fonction qui partage avec les puissances *paires* de x la propriété de ne pas changer de valeur lorsqu'on y change x en $-x$, c'est-à-dire une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait, pour toute valeur de x,

$$(1) \qquad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

On appelle fonction *impaire* de x une fonction qui partage avec les puissances *impaires* de x la propriété de prendre une valeur égale et de signe contraire, lorsque x prend une valeur égale et de signe contraire, c'est-à-dire une fonction $\chi(x)$ telle que l'on ait, quel que soit x,

$$(2) \qquad \chi(-x) = -\chi(x).$$

En différentiant l'équation (1), on a

$$-\varphi'(-x) = \varphi'(x);$$

donc la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire. De même, on tire de l'équation (2)

$$\chi'(-x) = \chi'(x);$$

donc la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

On conclut de là qu'en général toute dérivée d'ordre $\left\{\begin{matrix}\text{pair}\\ \text{impair}\end{matrix}\right\}$ d'une fonction *paire* est une fonction $\left\{\begin{matrix}\text{paire}\\ \text{impaire}\end{matrix}\right\}$, et que toute dérivée d'ordre $\left\{\begin{matrix}\text{pair}\\ \text{impair}\end{matrix}\right\}$ d'une fonction *impaire* est une fonction $\left\{\begin{matrix}\text{impaire}\\ \text{paire}\end{matrix}\right\}$.

Si une fonction impaire est continue dans le voisinage de $x = 0$,

l'équation (2) donne

$$f(0) = -f(0), \quad \text{d'où} \quad f(0) = 0;$$

donc une fonction impaire, lorsqu'elle est continue dans le voisinage de $x = 0$, s'évanouit avec la variable.

Il résulte de là que les dérivées d'ordre *pair* d'une fonction *impaire*, ainsi que les dérivées d'ordre *impair* d'une fonction *paire*, lorsque ces dérivées sont continues dans le voisinage de $x = 0$, s'évanouissent avec la variable.

CALCUL DIRECT DES DÉRIVÉES D'ORDRE QUELCONQUE.

289. La loi que suivent les dérivées des divers ordres, obtenues par des différentiations successives, est dans certains cas assez évidente pour que l'on puisse poser immédiatement la formule qui exprime une dérivée d'ordre quelconque, sauf à vérifier par la méthode connue la généralité de cette formule.

Donnons quelques exemples de cette détermination immédiate.

I. Pour $y = ax^2$, on a

$$y' = 2ax, \quad y'' = 2, \quad y''' = y^{(4)} = \ldots = y^{(n)} = 0,$$

toutes les dérivées d'ordre supérieur au second étant nulles.

II. Pour $y = x^m$, on trouve successivement

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Si m est entier et positif, on aura, pour $n = m$,

$$y^{(m)} = 1.2.3\ldots m,$$

valeur constante. Pour $n > m$, $y^{(n)}$ sera nul.

Si m n'est pas à la fois entier et positif, l'expression de $y^{(n)}$ ne deviendra jamais constante ni nulle.

Si l'on change m en $-m$, il viendra

$$D_x^n \frac{1}{x^m} = (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{x^{m+n}}.$$

III. Soit $y = \log x$, d'où $y' = \frac{1}{x}$. On aura

$$D_x^n y = D_x^{n-1} y' = (-1)^{n-1} \frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n}.$$

IV. Pour $y = e^x$, on a

$$y' = y'' = \ldots = e^x;$$

cette fonction se reproduit indéfiniment par la différentiation.

Si l'on donne la fonction $y = e^{ax}$, on aura

$$y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2 e^{ax}, \quad \ldots, \quad y^n = a^n e^{ax}.$$

On en conclut, pour $y = a^x = e^{x \log a}$,

$$D_x^n a^x = a^x \log a^n.$$

V. Pour $y = \sin x$, on trouve

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots$$

et en général

$$D_x^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

De même,

$$D^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

VI. Pour $y = (ax + b)^m$, on a

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}.$$

En particulier,

$$D_x^n \frac{1}{ax+b} = (-1)^n . 1.2\ldots n . \frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}},$$

$$D_x^n \frac{1}{\sqrt{ax+b}} = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot 1.3.5\ldots(2n-1) \cdot \frac{a^n}{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

290. Dans le cas où la loi de formation des dérivées est plus compliquée, on a recours à des procédés généraux, dont nous allons exposer les plus simples.

Procédé de décomposition en parties. — I. [illegible] 287

$$D^n(u+v+\ldots+w) = D^n u + D^n v + \ldots + D^n w,$$

donne le moyen de calculer les dérivées d'une somme, lorsqu'on sait trouver les dérivées des parties. D'après cela, pour avoir la dérivée d'ordre n d'une fonction, on cherchera à décomposer cette fonction en parties pour chacune desquelles on sache calculer immédiatement la $n^{\text{ième}}$ dérivée.

Exemples. — I. La fonction $\frac{1}{1-x}$ est de la [illegible] de la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

On a, par conséquent [289, VI],

$$\frac{1}{2}D_x\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}D_x\frac{1}{1+x}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots n}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

On a maintenant

$$D_x \operatorname{Arg\,Th} x = \frac{1}{2}D_x \log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x^2};$$

donc, pour $n > 1$,

$$D^n \operatorname{Arg\,Th} x = D^{n-1}\frac{1}{1-x^2} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+x)^n}\right].$$

On calculerait de même les dérivées de la fonction

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

et par suite celles de la fonction $\log(x^2-a^2)$.

II. Soit, en posant $\sqrt{-1} = i$,

$$y = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

On aura, comme dans l'exemple précédent, pour $n > 1$,

$$D_x^n \operatorname{arc\,tang} x = D_x^{n-1} \frac{1}{x^2+1}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2i} \cdot 1.2.3\ldots(n-1) \cdot \left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right].$$

Pour $x = 0$ et n pair, cette expression s'évanouit, ce qui résulte [288] de ce que arc tang x est une fonction impaire. Pour n impair et $= 2p+1$, on a, pour la valeur de $D_x^{2p+1} \operatorname{arc\,tang} x$ correspondante à $x = 0$,

$$\frac{1}{2i} \cdot 1.2\ldots 2p \cdot \frac{-2}{(i)^{2p+1}} = (-1)^p \cdot 1.2\ldots 2p.$$

On trouverait de même les dérivées de $\frac{x}{x^2+a^2}$ et de $\log(x^2+a^2)$.

III. Ce procédé peut s'étendre au calcul d'une dérivée d'ordre quelconque de toute fonction rationnelle, une telle fonction étant toujours, comme nous le verrons plus tard, décomposable en fractions de la forme $\frac{1}{(ax+b)^n}$.

291. *Procédé de la décomposition en facteurs : théorème de Leibnitz.* — Au lieu de décomposer une fonction en parties, on peut encore calculer les dérivées de cette fonction en la décomposant en facteurs, pourvu que l'on sache trouver les dérivées des divers ordres de chacun de ces facteurs.

En différentiant le produit $y = uv$, on trouve successivement

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \text{ etc.}$$

Dans toutes ces expressions, on remarque d'abord que la somme des indices de différentiation est constante pour les termes de chaque dérivée, et il est facile de voir que cette loi doit se maintenir pour toutes les dérivées suivantes ; car chaque nouvelle différentiation, affectant l'un ou l'autre des deux facteurs de chaque terme, augmente d'une unité la somme des indices de différentiation dans tous les termes obtenus. La loi des indices est donc la même que la loi des exposants dans le développement de la puissance

$$(u+v)^n,$$

en ayant soin d'introduire, dans les termes extrêmes u^n, v^n, qui ne renferment qu'un seul facteur, le facteur manquant v ou u à la puissance zéro, pour correspondre aux facteurs v ou u qui ont, dans les dérivées de y, l'indice de différentiation zéro.

On voit, de plus, que la loi des coefficients numériques est, pour les premières dérivées, la même que pour le développement de $(u+v)^n$, ce qui porte à penser que la loi est générale et que l'on a, quel que soit n,

$$y^{(n)} = u^n v^n + n_1 u^{n-1} v^{n-1} + n_2 u^{n-2} v^{n-2} + \ldots$$
$$+ n_p u^{n-p} v^{n-p} + \ldots + u^0 v^0,$$

en désignant, pour abréger, par $(n)_1$, $(n)_2$, ..., $(n)_p$, ... les coefficients binomiaux $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, ..., $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$, ...

On s'en assure, en différentiant cette expression et vérifiant, comme on le fait dans la démonstration de la formule du binôme, que la valeur de $y^{(n+1)}$ est ce que devient le développement précédent, lorsqu'on y remplace n par $n+1$.

On peut encore obtenir autrement cette loi des coefficients. Comme elle est indépendante de la nature des fonctions u et v, il suffit de calculer ces coefficients pour des valeurs particulières de u et de v. Prenons

$$u = e^{\alpha x}, \quad v = e^{x},$$

d'où [289]

$$u^{(n)} = e^{\alpha x} \alpha^n, \quad v^{(n)} = e^{x},$$
$$y = e^{(1+\alpha)x}, \quad y^{(n)} = (1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x}.$$

Soient maintenant A_0, A_1, ..., A_n les coefficients cherchés, de sorte qu'on ait

$$y^{(n)} = A_0 u^{(n)} v^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} v^{(n-1)} + \ldots + A_n u^{(0)} v^{(0)}.$$

Il viendra, en vertu des formules précédentes,

$$(1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x} = A_0 e^{\alpha x} e^{x} + A_1 e^{\alpha x} \alpha e^{x} + \ldots + A_n e^{\alpha x} \alpha^n e^{x}$$
$$= (A_0 + A_1 \alpha + \ldots + A_n \alpha^n) e^{(1+\alpha)x};$$

d'où l'on tire, quel que soit α,

$$(1+\alpha)^n = A_0 + A_1 \alpha + \ldots + A_n \alpha^n.$$

L'identité des deux membres montre que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ doivent être égaux aux coefficients binomiaux relatifs à la puissance $n^{\text{ième}}$.

Il résulte de là que l'on peut écrire la formule symbolique

$$D_x^n . uv = (u + v)^n,$$

en convenant de remplacer, après le développement, les exposants par des indices de différentiation, et ayant soin de rétablir les facteurs v^0, u^0 dans les termes u^n, v^n, qui deviendront ensuite $u^{(n)}v$, $uv^{(n)}$.

Si l'on avait un produit $uvw\ldots$ d'un nombre quelconque de facteurs, on pourrait, d'après les mêmes conventions, représenter symboliquement la $n^{\text{ième}}$ dérivée de ce produit par la formule

$$D_x^n . uvw\ldots = (u + v + w + \ldots)^n.$$

292. On peut déduire de là l'expression de la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'un quotient.

Soit $y = \frac{u}{v}$; on tire de là successivement

$$\begin{aligned}
u &= vy,\\
u' &= v'y + vy',\\
u'' &= v''y + 2v'y' + vy'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u^{(n)} &= v^{(n)}y + n_1 v^{(n-1)}y' + n_2 v^{(n-2)}y'' + \ldots + vy^{(n)}.
\end{aligned}$$

De ces $n+1$ équations on pourrait déduire successivement les valeurs des $n+1$ inconnues $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Mais on peut aussi obtenir directement la valeur de $y^{(n)}$. On a d'abord, pour le déterminant des coefficients des inconnues (111),

$$\begin{vmatrix}
v & 0 & 0 & \ldots & 0\\
v' & v & 0 & \ldots & 0\\
v'' & 2v' & v & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
v^{(n)} & n_1 v^{(n-1)} & n_2 v^{(n-2)} & \ldots & v
\end{vmatrix} = v^n,$$

ce qui est le dénominateur de la valeur de $y^{(n)}$. Pour avoir le numérateur, on remplacera les éléments de la dernière ligne verticale par les premiers membres des équations correspondantes, et l'on

aura enfin

$$y = \frac{1}{v}\begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \dots & u \\ v' & v & 0 & \dots & u' \\ v'' & 2v' & v & \dots & u'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v^{(n-1)} & n_1 v^{(n-2)} & n_2 v^{(n-3)} & \dots & u^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Si le numérateur était constant, $= 1$, par exemple, on remplacerait dans la dernière ligne verticale u par l'unité et tous les autres éléments par zéro, ce qui donnerait l'expression de $D_x^n \frac{1}{v}$.

Si l'on cherche les valeurs des dérivées de y correspondantes à $x = 0$, et si l'on suppose que u soit une fonction impaire et v une fonction paire de x, y sera une fonction impaire, et si l'on suppose que v ne s'annule pas avec x, les dérivées d'ordre pair de u et de y s'évanouiront avec x, ainsi que les dérivées d'ordre impair de v. Des équations précédentes il ne subsistera plus que celles de rang pair, et il ne restera plus que les termes de rang pair dans les seconds membres. On trouvera donc ainsi, en marquant de l'indice zéro les valeurs des quantités pour $x = 0$,

$$y_0^{(2n+1)} = \frac{1}{v_0^{2n+1}}\begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 & \dots & u_0' \\ 3_1 v_0'' & v_0 & 0 & \dots & u_0''' \\ 5_1 v_0^{\text{IV}} & 5_2 v_0'' & v_0 & \dots & u_0^{\text{V}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n+1_1 v_0^{(2n)} & 2n+1_2 v_0^{(2n-1)} & 2n+1_3 v_0^{(2n-2)} & \dots & u_0^{(2n+1)} \end{vmatrix}.$$

293. *Exemples.* — I. Soit la fonction

$$y = e^{ax} u.$$

La formule de Leibnitz donne

$$y^{(n)} = e^{ax} + u_1 e^{ax} = a^n e^{ax} u + n_1 a^{n-1} e^{ax} D_x u + \dots + e^{ax} D_x^n u,$$

que l'on peut représenter symboliquement par

$$\text{I}, \qquad y^{(n)} = e^{ax}(a + D_x)^n u.$$

Si l'on considère maintenant l'expression [287]

$$\varphi(D_x) y = \alpha_0 + \alpha_1 D_x + \dots + \alpha_m D_x^m) y,$$

φ désignant un polynôme rationnel à coefficients constants ou variables, on aura, en mettant pour les diverses dérivées de y leurs valeurs précédentes,

$$\varphi(D_x)(e^{ax}u) = e^{ax}(\alpha_0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_m a^m) + D_x^m u = e^{ax}\varphi(a) + D_x^m u.$$

Or on sait, par les éléments d'Algèbre, que si, dans un polynôme $\varphi(t)$ de degré m, on remplace t par $a + h$, le développement prend la forme

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1}h + \ldots + \frac{\varphi^{(m)}(a)}{1.2\ldots m}h^m.$$

On aura donc ici

$$\varphi(D_x)(e^{ax}u) = e^{ax}\left[\varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1}D_x + \ldots + \frac{\varphi^{(m)}(a)}{1.2\ldots m}D_x^m\right]u.$$

II. En appliquant la formule (1) de l'exemple précédent à la fonction

$$y = e^{ax}\cos bx,$$

il vient [289, V]

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[a^n\cos bx + n\,a^{n-1}b\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. - b^n\cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Mais on peut trouver une expression plus simple, en posant

$$a = k\cos l, \quad b = k\sin l,$$

ce qui donne

$$y^{(n)} = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) = ke^{ax}\cos(bx + l),$$

et en général, comme on peut le vérifier aisément,

$$y^{(n)} = k^n e^{ax}\cos(bx + nl).$$

III. Soit $y = \operatorname{tang} x$. On tire de là

$$y\cos x = \sin x,$$

d'où, en appliquant au premier membre la formule de Leibnitz,

on tire successivement

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=y\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+y'\cos x,$$

$$\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=y\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)+2y'\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+y''\cos x,$$

et ainsi de suite, et ces formules donneront successivement les valeurs de y', y'', y''', ... On obtiendrait directement la valeur de $y^{(n)}$ par la formule du n° 292.

On calculera de la même manière les dérivées de $\cot x$ et celles des fonctions hyperboliques $\operatorname{Th} x$, $\operatorname{Cth} x$, ainsi que de $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$, $\frac{1}{\operatorname{Ch} x}$, $\frac{1}{\operatorname{Sh} x}$.

Si l'on veut avoir les valeurs des dérivées de ces fonctions pour $x=0$, on simplifiera les formules récurrentes, en remarquant que, toutes ces fonctions étant impaires (ou paires), leurs dérivées d'ordre pair (ou impair) s'évanouissent avec la variable. On a, par exemple, pour $y=\operatorname{tang} x$,

$$y'_0=1,\quad y'''_0=3y'_0=3,\quad y^{\text{v}}_0=10y'''_0+5y'_0=15,\quad \ldots,$$

d'où

$$y'''_0=2,\quad y^{\text{v}}_0=16,\quad \ldots.$$

IV. Soit $y=\arcsin x$. La $n^{\text{ième}}$ dérivée $y^{(n)}$ est égale à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée de

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

On aura donc [289, VI]

$$\begin{aligned}
y^{(n)}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}.D_x^{n-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}}&+(n-1)D_x(1-x)^{-\frac{1}{2}}.D_x^{n-2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\ldots\\
&+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}+\left(\frac{-1}{1+x}\right)^{n-1}\right]\\
&+(-1)(n-1)\frac{1^2.3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2}+\left(\frac{-1}{1+x}\right)^{n-2}\right]\\
&+(-1)^2(n-1)(n-2)\frac{1^2.3^2.5\ldots(2n-7)}{2^{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-3}+\left(\frac{-1}{1+x}\right)^{n-3}\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, pour $x = 0$, les dérivées d'ordre pair de y s'évanouissent.

On peut encore déterminer les dérivées de la fonction $\arcsin x$ au moyen d'une formule récurrente. On a, en effet,

$$x = \sin y, \quad 1 = y' \cos y = y' \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 = y'' \cos y - y'^2 \sin y,$$

ou, à cause de $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ et de $xy' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$$(1 - x^2) y'' - xy' = 0.$$

En différentiant n fois cette formule au moyen du théorème de Leibnitz, il vient

$$(1 - x^2) y^{(n+2)} - [2(n+1)x] y^{(n+1)} - [2(n-1) + (n-1)] y^{(n)} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(1 - x^2) y^{(n+2)} = (2n + 1) x y^{(n+1)} + n^2 y^{(n)}.$$

En faisant $x = 0$ et supposant n impair, cette formule devient

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)},$$

d'où l'on tire

$$y'_0 = 1, \quad y'''_0 = 1^2, \quad y^{\text{v}}_0 = (1.3)^2, \quad \ldots, \quad y_0^{(2p+1)} = [1.3 \ldots (2p-1)]^2.$$

V. Nous avons déjà obtenu, par décomposition, la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $\operatorname{arc\,tang} x$. On peut encore l'obtenir comme il suit, sous une autre forme. De $x = \operatorname{tang} y$ on tire

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y, \quad y' = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = y'\left[-\sin y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= y' \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

En continuant ainsi, on parvient, par induction, à la formule

$$y^{(n)} = 1.2 \ldots (n-1) . \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

dont on peut vérifier immédiatement la généralité par la différentiation.

Pour $x = 0$ et n pair, y_n s'évanouit. Pour n impair et $= 2p + 1$, on a

$$y_{2p+1} = (-1)^p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2p.$$

VI. On peut ramener le calcul des dérivées de la fonction $\frac{x}{1 \pm x^2}$ à celui des dérivées de la fonction $\frac{1}{1 - x^2}$ (290, I), en écrivant

$$y = x \cdot \frac{1}{1 \pm x^2},$$

d'où

$$D_x^n \frac{x}{1 \pm x^2} = x \cdot D_x^n \frac{1}{1 \pm x^2} + n \cdot D_x^{n-1} \frac{1}{1 \pm x^2},$$

le développement s'arrêtant après le second terme, à cause de $D_x^2 x = 0$.

VII. Soit proposé de calculer les valeurs des dérivées successives de la fonction

$$y = \frac{x}{e^x - 1},$$

pour $x = 0$. On peut mettre la relation précédente sous la forme

$$(1) \qquad x = (e^x - 1)y,$$

ce qui donne, en différentiant n fois,

$$(2) \quad \begin{cases} 1 = e^x y + (e^x - 1)y', \\ 0 = e^x y + 2e^x y' + (e^x - 1)y'', \\ 0 = e^x y + 3e^x y' + 3e^x y'' + (e^x - 1)y''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = e^x y + n_1 e^x y' + n_2 e^x y'' + \ldots + (e^x - 1)y^{(n)}. \end{cases}$$

La résolution de ces équations fera connaître directement la valeur de la dérivée d'ordre quelconque $y^{(n)}$, pour une valeur donnée de x.

Si l'on suppose maintenant $x = 0$, le coefficient $e^x - 1$ de la plus haute dérivée dans chaque équation s'annule, et ces équations déterminent une dérivée de moins. Ainsi, l'équation (1) devenant

identique, c'est la première équation (2) qui donnera la valeur de y_0 [1], la seconde celle de y'_0, et ainsi de suite.

Remarquons, de plus, que, à partir de la seconde, les dérivées de la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ sont les mêmes que celles de la fonction $\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$, qui est une fonction paire, et dont par conséquent [288] toutes les dérivées d'ordre impair s'évanouissent avec x. Donc les valeurs de $y'''_0, y^{\text{v}}_0, \ldots, y^{(2n-1)}_0, \ldots$ seront toutes nulles, ce qui fait disparaître la moitié des termes dans les équations (2).

Enfin, ces réductions faites, deux équations consécutives, telles que la $(2n)^{\text{ième}}$ et la $(2n+1)^{\text{ième}}$, contiennent les mêmes inconnues, et doivent, par suite, être identiques entre elles. Donc les équations précédentes se partagent en deux systèmes, équivalents entre eux et déterminant les mêmes valeurs des inconnues.

En remarquant que les deux premières équations (2) donnent, pour $x = 0$,

$$y_0 = 1, \quad y'_0 = -\frac{1}{2},$$

les équations suivantes se partageront dans les deux systèmes suivants, comprenant l'un les équations de rang impair, l'autre les équations de rang pair :

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} = (3)_{(2)} y''_0, \\ \frac{3}{2} = (5)_{(2)} y''_0 + (5)_{(4)} y^{\text{iv}}_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{2n-3}{2} = (2n-1)_{(2)} y''_0 + (2n-1)_{(4)} y^{\text{iv}}_0 + \ldots + (2n-1)_{(2n-2)} y^{(2n-2)}_0, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} 1 = (4)_{(2)} y''_0, \\ 2 = (6)_{(2)} y''_0 + (6)_{(4)} y^{\text{iv}}_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n-1 = (2n)_{(2)} y''_0 + (2n)_{(4)} y^{\text{iv}}_0 + \ldots + (2n)_{(2n-2)} y^{(2n-2)}_0. \end{cases}$$

---

[1] On aurait pu cependant tirer cette valeur de l'équation (1), en remarquant que, pour x infiniment petit, on a [270] $e^x = 1 + x$.

Leurs déterminants respectifs ont pour valeurs

$$3.5.7\ldots(2n-1) \quad \text{et} \quad \frac{3.4.5\ldots 2n}{2^{n}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{2^{n}}{3.4.5\ldots 2n} = (-1)^{n-1} B_{n},$$

les nombres B_1, B_2, ... ainsi obtenus, seront les *nombres de Bernoulli*, et l'on trouvera pour leurs valeurs

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \ldots$$

§ IX.

DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. — LEUR EMPLOI POUR LA REPRÉSENTATION DES DÉRIVÉES.

294. Nous avons vu (**218**) qu'il est avantageux de représenter la dérivée première

$$y' = \lim \frac{dy}{dx}$$

d'une manière abrégée par sa valeur indéfiniment approchée

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

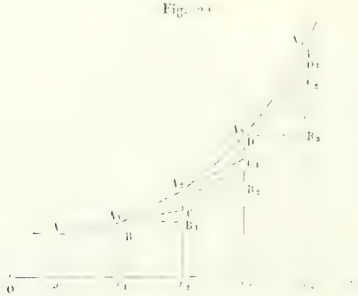
qui devient la valeur rigoureuse, lorsqu'on suppose la différentielle dy réduite à sa partie principale.

Il y a le même avantage à exprimer, à des quantités près infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve, les dérivées des divers ordres au moyen des différentielles des ordres correspondants.

Considérons une fonction y (*fig.* 22), représentée par l'ordonnée d'une courbe $A A_1 A_2 A_3 \ldots$. A partir de l'abscisse x, prenons des longueurs infiniment petites, *toutes égales entre elles*, et dont nous désignerons la valeur commune par dx. Soient x, $x + dx = x_1$, $x + 2dx = x_2$, ... les abscisses ainsi obtenues, et y, y_1, y_2, ... les ordonnées correspondantes. Les différences infini-

ment petites A_1B_1, A_2B_1, ..., ou $y_1 - y = dy$, $y_2 - y_1 = dy_1$, ... seront dites les *différentielles du premier ordre* de la fonction y, correspondantes aux valeurs y, y_1, ... de cette fonction.

Fig. 22



On peut imaginer que le système des ordonnées consécutives que l'on compare, et qui est composé de parallèles équidistantes, menées à la distance dx les unes des autres, glisse d'une manière continue parallèlement à lui-même, de manière à parcourir successivement tous les points de la courbe. La distance dx ne changeant pas avec l'abscisse x qui fixe la première ordonnée du système et détermine la position de l'ensemble, on dit pour cette raison que la quantité infiniment petite dx est *constante,* en sous-entendant qu'elle l'est *par rapport à x;* en d'autres termes, on veut dire par là que la distance dx est *la même* pour toutes les parallèles du système mobile, et qu'elle varie *indépendamment* de la position de la première parallèle, c'est-à-dire *indépendamment* de x. Ainsi, x variant, le système des parallèles se déplace sans que dx change; x restant fixe, et par suite la première ordonnée demeurant immobile, les autres ordonnées peuvent se rapprocher indéfiniment de la première, tout en restant équidistantes entre elles, ces deux changements, de position et d'écartement, s'effectuant indépendamment l'un de l'autre.

D'après cela, les différentielles dy, dy_1, ... sont des fonctions des deux variables indépendantes x et dx, et elles sont infiniment petites en même temps que dx, quelle que soit la valeur de x.

295. En prolongeant les cordes AA_1, A_1A_2, ... on obtient les différences de deux accroissements consécutifs de l'ordonnée.

$$A_2C = A_2B_1 - A_1B = y_2 - y_1 - y_1 - y = d^2y,$$
$$A_1C_1 = A_1B_2 - A_2B_1 = y_3 - y_2 - y_2 - y_1 = d^2y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

que l'on nomme les *différentielles du second ordre* ou les *différentielles secondes* de la fonction y pour les valeurs y, y_1, ... de cette fonction. On les désigne par les notations

$$d^2y, \quad d^2y_1, \quad d^2y_2, \quad \dots.$$

Ces différentielles secondes sont, comme les différentielles premières, des fonctions des deux variables indépendantes x et dx, infiniment petites en même temps que dx.

Pareillement, en menant A_2D parallèle à CC_1, A_3D_1 parallèle à C_1C_2, etc., on obtiendra les *différentielles du troisième ordre* ou *différentielles troisièmes* de la fonction y, pour les valeurs y, y_1, ...

$$A_2D = d^2y_1 - d^2y = d^3y, \quad A_3D_1 = d^2y_2 - d^2y_1 = d^3y_1, \quad \dots$$

En menant A_3E parallèle à DD_1, ..., on aura les *différentielles quatrièmes*

$$A_3E = d^3y_1 - d^3y = d^4y, \quad \dots.$$

Et ainsi de suite.

296. Théorème. — *Soit $\varphi(x, \alpha)$ une fonction des deux variables indépendantes x et α, continue par rapport à x pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle de x_0 à X, et pour toute valeur de α voisine de zéro, et ayant pour toutes ces valeurs une dérivée finie et déterminée $\varphi'_x(x, \alpha)$ par rapport à x. Si, de plus, la fonction $\varphi(x, \alpha)$ est, quel que soit x, infiniment petite en même temps que α, sa dérivée $\varphi'_x(x, \alpha)$ sera aussi, quel que soit x, infiniment petite en même temps que α.*

En effet, si l'on donne à x un accroissement quelconque h, compris dans l'intervalle donné, on aura [206]

$$\varphi(x+h, \alpha) - \varphi(x, \alpha) = h\,\mathfrak{M}\varphi'_x(x, \alpha).$$

Or le premier membre de cette égalité est infiniment petit en même temps que α ; il en est donc de même du second, et, comme h est fini, il faut que $\varphi'_x(x, \alpha)$ admette au moins une valeur moyenne moindre qu'une quantité donnée quelconque ε, pour x compris entre x et $x - h$. Or l'intervalle de x à $x + h$ est une portion quelconque de l'intervalle donné de x_0 à X. Donc [175], la fonction $\varphi'_x(x, \alpha)$ pourra satisfaire, pour α assez petit, à l'inégalité

$$\varphi'_x(x, \alpha) < \varepsilon,$$

dans tout l'intervalle de x_0 à X, c'est-à-dire que cette dérivée sera, comme la fonction primitive $\varphi(x, \alpha)$, infiniment petite avec α dans tout cet intervalle.

On en conclut immédiatement que les dérivées suivantes :

$$\varphi''_x(x, \alpha), \quad \varphi'''_x(x, \alpha), \quad \ldots$$

de la même fonction, tant qu'elles resteront finies dans l'intervalle donné, seront aussi, quel que soit x, infiniment petites avec α.

Si l'on donne à x un accroissement dx, de même ordre infinitésimal que α, le rapport $\frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx}$, ayant une limite infiniment petite, sera infiniment petit avec α et dx, et par suite le numérateur $d\varphi(x, \alpha)$ sera infiniment petit par rapport à dx. Donc la différentielle de la fonction infiniment petite $\varphi(x, \alpha)$ est infiniment petite du second ordre.

297. Par la définition même de la dérivée d'une fonction, la quantité

$$\varepsilon = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} - f'(x)$$

est une fonction des variables indépendantes x et dx, continue par rapport à x si les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ le sont, et infiniment petite en même temps que dx, quel que soit x. Donc ses dérivées par rapport à x seront aussi infiniment petites en même temps que dx, et sa différentielle par rapport à x sera un infiniment petit du second ordre.

Cela posé, on a, ε et ε_1 étant infiniment petits en même temps

que dx,

$$dy = y'dx + \varepsilon dx,$$

$$dy' = y''dx + \varepsilon_1 dx.$$

En différentiant la première de ces deux égalités, il vient, dx étant constant relativement à x,

$$d^2y = dy'dx + d\varepsilon dx = y''dx^2 + \varepsilon_1 dx^2 + d\varepsilon dx = y''dx^2 + \varepsilon_2 dx^2 + d\varepsilon dx,$$

quantité qui se compose d'une *partie principale* $y''dx^2$, qui est infiniment petite du *second ordre*, et d'une *partie secondaire* $\varepsilon_2 dx^2 + d\varepsilon dx$, qui est infiniment petite du *troisième ordre*, et que l'on peut représenter par εdx^2, ε étant infiniment petit. D'après cela, on a

$$d^2y = y''dx^2 + \varepsilon dx^2,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' + \varepsilon,$$

et par suite

$$\lim \frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

Ainsi la dérivée seconde est égale à la limite du rapport de la différentielle seconde de la fonction au carré de la différentielle *constante* de la variable indépendante.

On pourra donc, soit en sous-entendant le mot *limite*, soit en faisant usage d'une équation imparfaite, comme on l'a déjà fait pour le cas de la dérivée première [218], écrire simplement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

On a en même temps, à un infiniment petit près du troisième ordre, l'équation imparfaite

$$d^2y = y''dx^2,$$

que l'on peut employer dans les calculs de limites de rapports ou de sommes, au lieu de l'équation rigoureuse

$$d^2y = y'' + \varepsilon dx^2.$$

De cette dernière équation rigoureuse on tire, à cause de

$$dy'' = y''' + \varepsilon' dx,$$

$$d^3y = dy'' + d\varepsilon\, dx^2 = y''' dx^3 + \varepsilon' dx^3 + d\varepsilon\, dx^2.$$

ε' étant un infiniment petit du premier ordre, et $d\varepsilon$ un infiniment petit du second ordre [296], l'ensemble des deux derniers termes formera un infiniment petit du quatrième ordre, de la forme εdx^3, ε étant infiniment petit. Donc

$$d^3y = y''' dx^3 + \varepsilon dx^3,$$

d'où

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' + \varepsilon, \quad \lim \frac{d^3y}{dx^3} = y''',$$

ou simplement, comme ci-dessus,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''',$$

et, en réduisant d^3y à sa partie principale,

$$d^3y = y''' dx^3.$$

En continuant le même raisonnement, on trouvera, en général,

$$d^ny = y^{(n)} + \varepsilon\, dx^n, \quad \lim \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)},$$

ou simplement, en ne considérant que la partie principale de d^ny,

$$d^ny = y^{(n)} dx^n, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

298. En récapitulant ce qui précède, on voit que :

1° dx étant considéré comme la base du système d'infiniment petits, les différentielles successives

$$dy, \quad d^2y, \quad d^3y, \quad \ldots, \quad d^ny$$

sont des infiniment petits des ordres marqués par leurs indices respectifs ;

2° Les dérivées

$$\{\mathbf{A}\} \qquad y', \quad y'', \quad y''', \quad \ldots, \quad y^{(n)}$$

sont les limites respectives des rapports

$$\text{B} \qquad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n},$$

en supposant que l'accroissement dx, donné à la *variable indépendante* x, soit *constant*, c'est-à-dire que les valeurs de y infiniment voisines, qui servent à former les différentielles dy, d^2y, ..., d^ny répondent à des valeurs équidistantes de la variable x, ce qui peut toujours avoir lieu, lorsque cette variable x est indépendante.

Nous prendrons désormais les expressions (B) pour représenter les dérivées (A), soit que nous supposions le mot *limite* sous-entendu; soit que nous commettions volontairement une erreur infiniment petite, que nous savons être sans influence sur le résultat final; soit enfin que nous convenions de réduire, dans de pareilles expressions, les différentielles dy, d^2y, ... à leurs *parties principales*.

§ X.

CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

299. Ce que nous venons d'établir suppose essentiellement que les différences

$$x_1 - x, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad x_n - x_{n-1},$$

entre les états successifs de la variable indépendante, sont égales entre elles. C'est ce que nous avons exprimé en disant que la différentielle de la variable indépendante doit être *constante*, c'est-à-dire indépendante de x.

Cette condition étant remplie, on a, par exemple,

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \lim \frac{y'_1 - y'}{x_1 - x_2} = \lim \frac{\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_1 - x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} - \lim \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \lim \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}}{x_1 - x} = \lim \frac{y_2 - y_1 - y_1 + y}{(x_1 - x)^2} \\ &= \lim \frac{dy_1 - dy}{(x_1 - x)^2} = \lim \frac{d^2y}{dx^2}, \end{aligned}\right\}$$

ce qui n'aurait point lieu si $x_2 - x_1$ était différent de $x_1 - x$.

Si les accroissements successifs de x n'étaient pas rigoureusement égaux entre eux, on aurait bien encore

$$y' = f'(x) = \lim \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = f''(x) = \lim \frac{dy'}{dx},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \lim \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

c'est-à-dire que toutes les formules où il n'entre que des différentielles du premier ordre continueraient à subsister; mais on voit que les dernières transformations de l'équation (1), par exemple, ne pourraient plus s'effectuer, puisque l'on ne pourrait plus substituer $x_1 - x$ à $x_2 - x_1$, et, par suite, on n'aurait plus

$$y'' = \lim \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

300. Lorsque $n+1$ variables sont liées par n relations, de sorte que le mode de variation de l'une d'elles détermine le mode de variation de toutes les autres, on peut toujours faire en sorte que l'une de ces variables croisse par intervalles égaux dans la formation des valeurs qui servent à calculer les différentielles des divers ordres des autres variables. Cette variable, que l'on assujettit ainsi à une marche qui la distingue de toutes les autres, et dont les accroissements ne dépendent ni de cette variable elle-même, ni des autres variables, est dite la *variable indépendante*.

Considérons, par exemple, deux variables x, y, fonctions toutes les deux de la variable indépendante t. A des accroissements de t égaux entre eux et désignés par dt correspondent des accroissements de x,

$$dx, \quad dx_1, \quad \dots, \quad dx_{n-1},$$

qui ne sont plus égaux entre eux. On aura, en effet,

$$dx = (\mathrm{D}_t x + \varepsilon)dt, \quad dx_1 = (\mathrm{D}_t x_1 + \varepsilon_1)dt, \quad \dots$$

et comme

$$\mathrm{D}_t x_1 = \mathrm{D}_t x + \mathrm{D}_t^2 x . dt + \varepsilon' dt,$$

il en résulte

$$dx_1 = dx + D^2x = \varepsilon \, dt^2,$$

quantité qui diffère de dx d'un infiniment petit du second ordre, et par suite d'une quantité comparable à $dy_1 - dy$, et que nous désignerons par d^2x.

Dans ce cas donc le produit $dy = y' = \varepsilon \, dx$ aura ses deux facteurs variables, chacun d'une quantité infiniment petite du premier ordre par rapport à lui-même, de sorte que la variation de chacun d'eux entraînera dans le produit une *variation relative* du premier ordre. En changeant, dans ce produit, t en $t + dt$, il vient, à des quantités près du troisième ordre,

$$dy_1 = dy_1 = y' = dy + d^2y = \varepsilon \, dx + d^2x = dy + \varepsilon \, dx + d^2x$$

$$= y' + \varepsilon \, dx + \varepsilon \, dx + \varepsilon \, dx = y' + 2\varepsilon \, dx + \varepsilon \, dx,$$

d'où, en désignant par ε_1 un infiniment petit du troisième ordre,

$$dy_1 = y' + dy + \varepsilon \, dx + \varepsilon_1,$$

et, par suite, à un infiniment petit du premier ordre près,

$$y'' = \frac{dy_1 - dy}{dx} = \frac{d^2x}{dx} = \frac{dx + d^2x}{dx} = \frac{dx + d^2x}{dx},$$

valeur que l'on aurait obtenue en traitant par les règles de la différentiation [263] le rapport $\frac{dy}{dx}$, dont les deux termes seraient considérés comme variables. On voit que cette expression n'est pas égale à $\frac{d^2y}{dx^2}$, lorsque d^2x n'est pas nul. Il en sera de même des ordres suivants y''', y^{IV}, ... dont les expressions ne seront plus simplement $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ..., mais deviendront de plus en plus compliquées.

301. Pour faire usage de ces expressions, on divisera les termes de chaque fraction par la puissance de dt qui correspond à leur ordre infinitésimal, et l'on changera ainsi les quotients de différentielles en quotients de dérivées, ou, ce qui revient au même, on y remplacera

$$dx, \quad d^2x, \quad \ldots, \quad dy, \quad d^2y, \quad \ldots$$

respectivement par

$$D_t x\,dt,\quad D_t^2 x\,dt^2,\quad \ldots,\quad D_t y\,dt,\quad D_t^2 y\,dt^2,\quad \ldots,$$

et l'on divisera les deux termes par les puissances de dt qu'ils renferment. On a ainsi, par exemple,

$$y'' = \frac{D_t x . D_t^2 y - D_t y . D_t^2 x}{D_t x^3},$$

expression que l'on aurait pu obtenir en cherchant la dérivée par rapport à t de $y' = \frac{D_t y}{D_t x}$, et la divisant par $D_t x$ [252].

On voit, d'après la manière dont nous calculons ces expressions générales des dérivées $D_x y$, $D_x^2 y$, ... de y, prises par rapport à x considérée comme variable indépendante, que ces expressions au moyen de $D_t x$, $D_t^2 x$, ..., $D_t y$, $D_t^2 y$, ... ne dépendent nullement du mode particulier de liaison des variables x, y, t.

302. Au lieu d'employer les formules développées comme celles du numéro précédent, il est plus simple, lorsqu'on veut passer du cas de x variable indépendante au cas d'une variable indépendante quelconque, de remplacer les expressions de y'', y''', ... au moyen des différentielles de y d'ordres supérieurs au premier par des expressions qui ne renferment que des différentielles du premier ordre. On aura ainsi

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx},\quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}}{dx},\quad \ldots,$$

expressions qui ne dépendent plus [299] du choix de la variable indépendante.

Dans la pratique, pour calculer les dérivées successives y', y'', y''', ... au moyen des relations

$$x = \varphi(t),\quad y = \chi(t),$$

on calculera d'abord les différentielles

$$dx = \varphi'(t)\,dt,\quad dy = \chi'(t)\,dt,$$

d'où l'on tire, par division,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi_1(t).$$

On a ensuite

$$dy' = \chi_1'(t)\,dt, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\chi_1'(t)}{\varphi'(t)} = \chi_2(t),$$

$$dy'' = \chi_2'(t)\,dt, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\chi_2'(t)}{\varphi'(t)} = \chi_3(t),$$

et ainsi de suite.

303. Si, au lieu de x, on prend pour nouvelle variable indépendante une fonction linéaire de x,

$$t = ax + b,$$

on voit que, si l'une des variables x, t croît par intervalles égaux, l'autre croîtra aussi par intervalles égaux. Donc les valeurs y, y_1, y_2, ..., qui correspondaient aux valeurs x, $x + dx$, $x + 2dx$, ... de l'ancienne variable indépendante, seront les mêmes que celles qui correspondront aux valeurs t, $t + dt$, $t + 2dt$, ... de la nouvelle variable indépendante. Donc les valeurs de dy, d^2y, d^3y, ... seront les mêmes dans les deux cas. On aura donc généralement

$$D_t^n y = \frac{d^n y}{dt^n} = \frac{d^n y}{a^n dx^n} = \frac{1}{a^n} D_x^n y,$$

et, par suite,

$$y^{(n)} = D_x^n y = a^n D_t^n y.$$

En particulier, pour

$$a = 1, \quad t = x + b,$$

on aura

$$D_x^n y = D_t^n y.$$

304. *Exemples.* — I. Transformer l'expression

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

en prenant y au lieu de x pour variable indépendante.

On aura, en considérant maintenant dy comme constant,

$$\frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx} = - \frac{dy\, d^2 x}{dx^3}.$$

L'expression proposée prendra donc la forme

$$dy \frac{dx\, dy - d^2 x\, y}{dx^3} = \frac{x' - x''}{x'^3},$$

en désignant par x', x'' les nouvelles dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

II. Trouver ce que devient $\frac{d^2 y}{dx^2}$, lorsqu'on prend pour nouvelle variable indépendante la quantité

$$t = x + x^2.$$

On mettra d'abord $\frac{d^2 y}{dx^2}$ sous la forme $\frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}$. On a maintenant

$$dt = (1 + 2x)\, dx,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2x) \frac{dy}{dt}, \quad d \frac{dy}{dx} = 2 dx \frac{dy}{dt} + (1 + 2x)^2 d \frac{dy}{dt};$$

d'où l'on tire, en divisant par dx, l'expression transformée

$$2 \frac{dy}{dt} + (1 + 2x)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \frac{dy}{dt} + (1 + 2x)^2 \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

III. On veut prendre pour variable indépendante la quantité s, dont la différentielle est donnée par l'équation

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

La valeur de

$$y'' = \frac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3}$$

devient, en ayant égard à la condition

$$d^2 s = 0, \quad \text{ou} \quad dx\, d^2 x + dy\, d^2 y = 0,$$

et éliminant dx et $d^2 x$,

$$y'' = \frac{dx^2 d^2 y + dy^2 d^2 y}{dx^3} = \frac{ds^2 d^2 y}{ds^2 - dy^2},$$

ou encore

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{\left(1 + \frac{[illegible]}{[illegible]}\right)}.$$

D'après cela, l'expression $z = \frac{ds}{dx}$ devient

$$z = [illegible] \sqrt{1 + \frac{[illegible]}{[illegible]}}.$$

Si l'on suppose, par exemple, que x et y soient les coordonnées de la cycloïde,

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{1}{2} t,$$

on aura

$$dx = a\,dt(1 - \cos t), \quad dy = a\,dt \sin t,$$

d'où

$$ds = a\,dt\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \sin \frac{1}{2} t, \quad \frac{ds}{dx} = \cos \frac{1}{2} t,$$

$$d\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} t\,dt, \quad \frac{d^2 s}{dx^2} = -\frac{1}{4} \frac{[illegible]}{[illegible]} = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} t \sqrt{2a}.$$

§ XI.

DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES PARTIELLES, DIFFÉRENTIELLES TOTALES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

305. Soit $z = f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y. Si l'on n'y fait d'abord varier que x, en laissant y constant, on se trouvera dans le cas des fonctions d'une seule variable, et en supposant, comme au n° 297, *dx constant*, on formera les différentielles partielles des divers ordres de z par rapport à x,

$$d_x z, \quad d_x d_x z = d_x^2 z, \quad d_x d_x^2 z = d_x^3 z, \quad \ldots.$$

En divisant ces différentielles par les puissances correspondantes de dx, et adoptant pour les dérivées partielles de tous les ordres

la même notation que pour celles du premier ordre [224], on formera les expressions

$$\lim \frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim \frac{d_x^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \lim \frac{d_x^3 z}{dx^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \ldots,$$

que l'on peut remplacer aussi par

$$D_x z, \ D_x^2 z, \ D_x^3 z, \ \ldots,$$

lorsque cette notation ne présente pas d'équivoque.

De même, si l'on ne fait varier que y, en supposant x constant, et faisant croître y par degrés égaux, on obtiendra les différentielles partielles des divers ordres

$$d_y z, \ d_y^2 z, \ d_y^3 z, \ \ldots,$$

puis les dérivées partielles correspondantes

$$\lim \frac{d_y z}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y z, \quad \lim \frac{d_y^2 z}{dy^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D_y^2 z, \quad \ldots.$$

306. Supposons maintenant que l'on fasse varier successivement les deux variables, d'abord x par exemple, puis y. En faisant croître x de dx, z croîtra de

$$d_x z = f(x + dx, y) - f(x, y).$$

Si actuellement, dans cette fonction des variables indépendantes x, y, dx, on fait croître y de dy, $d_x z$ croîtra de

$$\begin{aligned} d_y(d_x z) &= f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) \\ &\quad - [f(x + dx, y) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

Si l'on avait commencé par faire varier y, puis x, la valeur que l'on aurait trouvée pour $d_x(d_y z)$ aurait été identique avec la précédente. Donc on aura rigoureusement

$$d_x(d_y z) = d_y(d_x z).$$

Donc l'opération de la combinaison des différentiations d_x, d_y, par rapport à deux variables indépendantes, est commutative. De plus elle est associative; car, pour obtenir la différentielle d_z de l'expression $d_y(d_x u)$, il faut différentier $d_x u$ par rapport à y, puis par

rapport à z, c'est-à-dire lui faire subir l'opération $d_z d_y$, de sorte que

$$d_z d_y d_x u = d_z d_y (d_x u),$$

ce qui donne la propriété associative

$$d_z d_y d_x u = d_z (d_y d_x u).$$

Il résulte de là que les opérations de différentiation par rapport à deux ou à plusieurs variables indépendantes se combinent entre elles suivant les règles de la multiplication des monômes ; de sorte que l'on peut, quel que soit le nombre des variables indépendantes et quel que soit le nombre des facteurs, transposer ceux-ci d'une manière quelconque et remplacer le produit de plusieurs facteurs égaux par une puissance de l'un deux.

307. On a maintenant [225]

$$d_x z = \left(\frac{dz}{dx} + \varepsilon\right) dx,$$

ε étant infiniment petit en même temps que dx, d'où

$$d_y d_x z = d_y \left(\frac{dz}{dx} + \varepsilon\right) dx = \left(\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} + \varepsilon'\right) dy\, dx + d_y \varepsilon\, dx,$$

ε' étant infiniment petit en même temps que dy, et $d_y \varepsilon$ étant infiniment petit de l'ordre du produit $dy\, dx$ [296]. En divisant donc par $dy\, dx$, on aura

$$\lim \frac{d_y d_x z}{dy\, dx} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}.$$

On trouverait de la même manière

$$\lim \frac{d_x d_y z}{dx\, dy} = \frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}.$$

Or, les deux expressions

$$\frac{d_y d_x z}{dy\, dx}, \quad \frac{d_x d_y z}{dx\, dy}$$

étant rigoureusement égales, leurs limites aussi seront rigoureusement égales ; de sorte que l'on aura

$$\frac{d\,\frac{dz}{dx}}{dy} = \frac{d\,\frac{dz}{dy}}{dx},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$D_x D_y z = D_y D_x z.$$

Donc la combinaison des opérations de dérivation D_x, D_y par rapport à des variables indépendantes est commutative comme la combinaison des différentiations correspondantes. La dérivation est aussi associative, comme la différentiation. Donc les dérivations successives opérées sur une même fonction se combinent d'après une règle entièrement identique à celle de la multiplication des monômes.

308. Une expression de la forme

$$a D_x^i D_y^k \ldots u + b D_x^{i'} D_y^{k'} \ldots u + \ldots$$

u étant une fonction des variables indépendantes $x, y, \ldots$, pourra se représenter symboliquement sous la forme

$$\varphi(D_x, D_y, \ldots) u,$$

le signe d'opération φ indiquant le polynôme

$$\varphi(D_x, D_y, \ldots) = a D_x^i D_y^k \ldots + b D_x^{i'} D_y^{k'} \ldots + \ldots$$

Si l'on désigne par χ un autre signe d'opération analogue

$$\chi(D_x, D_y, \ldots) = \alpha D_x^i D_y^k \ldots + \beta D_x^{i'} D_y^{k'} \ldots + \ldots,$$

on verra, comme au n° 287, que, si les coefficients $\alpha, \beta, \ldots$ sont constants, la combinaison des opérations φ et χ, c'est-à-dire le calcul de l'expression

$$\varphi(D_x, D_y, \ldots)[\chi(D_x, D_y, \ldots) u]$$

s'opérera par la règle de la multiplication des polynômes.

De plus, si le premier polynôme φ a aussi ses coefficients $a, b, \ldots$ constants, les deux opérations φ et χ seront commutatives.

Enfin, si l'on a plusieurs opérations successives exprimées par des polynômes en $D_x, D_y, \ldots$ à coefficients constants, leur combinaison sera associative et jouira ainsi de toutes les propriétés de la multiplication algébrique des polynômes.

Ce que nous venons de dire des polynômes formés avec les signes de dérivation $D_x, D_y, \ldots$ s'applique, sans aucun changement, aux polynômes formés d'une manière analogue avec les signes de différentiation partielle $d_x, d_y, \ldots$.

309. En particulier, nous avons vu (230) que la différentielle totale d'une fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$ de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ est donnée par la formule

$$du = d_x u + d_y u + \ldots = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots,$$

en ne tenant pas compte des infiniment petits du second ordre. D'après cela, l'opération indiquée par la caractéristique d peut être représentée symboliquement par l'équation

$$d = d_x + d_y + \ldots = dx D_x + dy D_y + \ldots.$$

Elle rentre donc dans la classe de celles que nous avons considérées dans le numéro précédent.

Or du est une fonction des variables $x, y, \ldots$ et des *constantes* $dx, dy, \ldots$. On peut donc chercher, comme pour u, sa différentielle totale, qui sera [308]

$$d^2 u = d^2 u = (d_x + d_y + \ldots)^2 u = (d_x + d_y + \ldots)(d_x + d_y + \ldots) u,$$

ou, sous une autre forme,

$$d^2 u = (dx D_x + dy D_y + \ldots)(dx D_x + dy D_y + \ldots) u$$
$$= (dx D_x + dy D_y + \ldots)^2 u.$$

On pourra calculer de même les différentielles totales du troisième, du quatrième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre, et l'on aura généralement

$$d^n u = (d_x + d_y + \ldots)^n u = (dx D_x + dy D_y + \ldots)^n u$$

la puissance $n^{\text{ième}}$ du polynôme symbolique $d_x + d_y + \ldots$, ou $dx\,D_x + dy\,D_y + \ldots$ se calculant par les règles ordinaires de l'Algèbre.

Remarquons que ces formules supposent essentiellement les différentielles dx, dy, ... constantes, et, par suite, les variables $x, y, \ldots$ indépendantes entre elles. S'il en était autrement, les différentielles totales d'ordre supérieur au premier contiendraient, outre les termes donnés par la formule précédente, d'autres termes provenant de la variation de dx, dy, ...

310. On peut encore mettre les différentielles totales du, d^2u, ... sous une autre forme, qui nous sera utile par la suite.

Considérons la fonction

$$F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, \ldots),$$

qui, pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, devient respectivement

$$F(0) = f(x, y, \ldots), \quad F(1) = f(x + dx, y + dy, \ldots).$$

On a, en différentiant par rapport à la variable indépendante α,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F'(\alpha) &= f'(x + \alpha dx) \cdot \frac{\partial(x + \alpha dx)}{\partial \alpha} + \ldots \\ &= f'(x + \alpha dx)\,dx + f'(y + \alpha dy)\,dy + \ldots, \end{aligned} \right.$$

d'où, en faisant $\alpha = 0$,

$$(2) \quad F'(0) = f'(x)\,dx + f'(y)\,dy + \ldots = df(x, y, \ldots).$$

Donc, pour avoir la différentielle totale d'une fonction (réduite à sa partie principale), il faut augmenter dans cette fonction x de αdx, y de αdy, etc.; puis différentier le résultat par rapport à α, et faire, après la différentiation, $\alpha = 0$.

Pour obtenir d^2u, il faut appliquer la règle précédente à la valeur de du donnée par l'équation (2), ce qui donne l'équation (1). En différentiant par rapport à α, ce qui donne $F''(\alpha)$, puis faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$F''(0) = d^2u.$$

En continuant de cette manière, on obtiendra généralement

$$F^{(n)}(0) = d^n u.$$

§ XII.

DES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS.

311. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

n fonctions données des n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Ces fonctions seront dites *indépendantes* entre elles, si les équations (1) qui les définissent peuvent être résolues par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$, ou du moins si l'on peut assigner, pour tout système de valeurs données de $y_1, \ldots, y_n$, un ou plusieurs systèmes déterminés de valeurs de $x_1, \ldots, x_n$, de telle sorte que ces dernières variables puissent, à leur tour, être considérées comme des fonctions des variables $y_1, \ldots, y_n$, celles-ci jouant le rôle de variables indépendantes.

312. Si les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ sont déterminées par celles de $y_1, \ldots, y_n$, leurs différentielles seront déterminées aussi au moyen de $y_1, \ldots, y_n$ et de leurs différentielles. Donc les équations

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

pourront être résolues par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, ce qui exige que leur déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

Ce déterminant, dont les éléments sont les dérivées partielles des n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ par rapport aux n variables $x_1, \ldots, x_n$

dont ces fonctions dépendent, s'appelle le *déterminant fonctionnel* de ce système de fonctions. Nous le désignerons d'une manière plus abrégée par la notation

$$R = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Nous dirons donc que, *si les n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendantes entre elles, leur déterminant fonctionnel n'est pas nul.* Nous démontrerons tout à l'heure que cette dernière condition n'est pas seulement nécessaire pour l'indépendance des fonctions $f_1, \ldots, f_n$, mais encore qu'elle est suffisante.

313. Si, au lieu d'être données explicitement par des équations résolues comme les équations (1), les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont données implicitement par des équations non résolues

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0, \end{array} \right.$$

on pourra exprimer le déterminant R au moyen des dérivées partielles des fonctions $F_1, \ldots, F_n$. On a, en effet, i et k étant deux nombres quelconques pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}.$$

Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} c'_1 & \ldots & c'^{(n)}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c'_n & \ldots & c'^{(n)}_n \end{vmatrix}$$

des éléments

$$c'_k = a'_1 b'_k + \ldots + a'_n b'^{(n)}_k$$

est égal [148] au produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & a'^{(n)}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & \ldots & a'^{(n)}_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b'_1 & \ldots & b'^{(n)}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_n & \ldots & b'^{(n)}_n \end{vmatrix}$$

On aura donc, en prenant

$$c_n' = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad c_i = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad b = \frac{\partial y}{\partial x},$$

la formule

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial y_n} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

ou

$$(-1)^n \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial(y, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \cdot R,$$

d'où l'on tire la valeur du déterminant cherché R.

Pour $n = 1$, cette formule devient

$$-\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx_1},$$

ce qui donne la formule connue (254) pour la différentiation d'une fonction implicite.

314. Si l'on considérait les équations (3) comme déterminant les n quantités $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $y_1, \ldots, y_n$, on aurait de la même manière

$$(-1)^n \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

De cette équation et de l'équation (4) on tire

$$(5) \qquad 1 = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

formule qui correspond à la formule de la différentiation des fonctions inverses [251], dans le cas d'une seule variable indépendante.

On peut encore démontrer directement cette formule, en différentiant les équations (1) par rapport à $y_1, \ldots, y_n$, considérées

comme les nouvelles variables indépendantes, dont $x_1, \ldots, x_n$ sont des fonctions. On a ainsi

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_k},$$

le premier membre étant égal à 1 ou à zéro, suivant que les indices i et k sont égaux ou inégaux. Le déterminant des premiers membres se réduisant à son terme principal 1, on a immédiatement la formule (5).

315. Supposons maintenant que l'on ait $n+p$ fonctions

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_{n+p},$$

données en $x_1, \ldots, x_n$ par les $n+p$ équations

$$(6)\quad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_{n+p}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n+p}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_{n+p}) = 0. \end{cases}$$

On veut calculer, au moyen de ces équations, le déterminant fonctionnel (2) des n premières fonctions $y_1, \ldots, y_n$.

On a, en différentiant les $n+p$ équations (6),

$$(7)\quad -\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_{n+p}}\frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_k},$$

les indices i et k prenant les valeurs

$$i = 1, 2, \ldots, n+p, \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Le produit des déterminants

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+p}} \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

de degrés différents $n+p$ et n, s'obtient [151] en mettant R sous la forme d'un déterminant de degré $n+p$ [113], ce qui se fera en

l'écrivant ainsi :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

les éléments des p dernières lignes étant nuls, sauf ceux de la diagonale, qui sont égaux à l'unité. Pour $k \leq n$, l'élément c_k^i du produit est égal à $-\frac{\partial F}{\partial x_k}$, en vertu de l'équation (7). Pour $k > n$, c_k^i se réduit à $\frac{\partial F}{\partial y_k}$. Donc le produit des deux déterminants,

$$P = Q.R,$$

a pour valeur

$$P = (-1)^p \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n+p}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial x_n} & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+1}} & \dots & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+p}} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^p \frac{\partial(F_1, \dots, F_{n+p})}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+p})},$$

et l'on en tire $R = \frac{P}{Q}$.

316. Si l'on suppose les variables $x_1, \dots, x_n$ indépendantes, il faut que les équations (3) qui les lient aux variables $y_1, \dots, y_n$ soient telles qu'on n'en puisse tirer, par l'élimination, aucune relation non identique entre les seules variables $x_1, \dots, x_n$, et ne contenant plus aucune des variables $y_1, \dots, y_n$.

De même, pour que l'on puisse remplacer les variables $x_1, \dots, x_n$ par les variables $y_1, \dots, y_n$, qui en sont des fonctions, il faut que ces fonctions soient *indépendantes* entre elles, c'est-à-dire qu'on ne puisse tirer des équations (3) ou (1), par élimination, aucune

relation non identique entre les seules variables $y_1, \ldots, y_n$, ne contenant plus aucune des variables $x_1, \ldots, x_n$.

Nous allons démontrer que, pour que les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ soient indépendantes entre elles, il faut et il suffit que leur déterminant fonctionnel (2) ne soit pas identiquement nul.

Supposons que des équations (3) ou (1) on ait tiré la valeur

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$$

de l'une des variables $y_1, \ldots, y_n$, et soit x_1 une des variables $x_1, \ldots, x_n$ contenues dans cette expression. Résolvons cette équation par rapport à x_1, et substituons la valeur obtenue, en fonction de $y_1, x_2, \ldots, x_n$, dans les $n-1$ équations restantes. Les expressions de $y_2, y_3, \ldots, y_n$ seront des fonctions de $y_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit x_2 une des variables x contenues dans l'expression de y_2; résolvons l'équation $y_2 = \varphi_2(y_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport à x_2, et substituons la valeur obtenue en $y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n$ dans les $n-2$ équations restantes, dont chacune devra contenir, après la substitution, quelqu'une des quantités $x_3, \ldots, x_n$. Soit x_3 une des variables x contenues dans l'expression de $y_3 = \varphi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$. Résolvons cette équation par rapport à x_3, et portons, dans les $n-3$ équations restantes, la valeur obtenue en fonction de $y_1, y_2, y_3, x_4, \ldots, x_n$. Et ainsi de suite.

Si les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont toutes indépendantes entre elles, on devra pouvoir continuer cette transformation successive des équations (1), de manière que la dernière équation transformée contienne encore x_n, de sorte que l'on pourra remplacer les équations (1) par les suivantes :

$$8^{\circ}\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(y_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_3 = \varphi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n), \\ y_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n). \end{array}\right.$$

Réciproquement, si cette transformation peut s'effectuer, les équations seront résolubles par rapport à $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, puisque la $n^{\text{ième}}$ contient x_n, la $(n-1)^{\text{ième}}$ $x_{n-1}, \ldots$, la première x_1, et que les substitutions successives des valeurs de $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$

ne peuvent faire disparaître toutes les variables $y_1, \ldots, y_n$, puisque chaque substitution de la valeur d'une quantité x_k introduit dans la $(k-1)^{\text{ième}}$ équation une variable y_k qui n'y était pas contenue, et qui n'en peut disparaître, parce qu'elle n'est amenée que par la seule variable x_k qui la contient certainement. Donc l'élimination de $n-1$ quelconques des variables $x_1, \ldots, x_n$ ne fait pas disparaître la $n^{\text{ième}}$; donc les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont indépendantes entre elles.

Cela posé, en différentiant les équations (8), on en tire des équations de la forme

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i},$$

$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ étant nul pour $k > i$, et $\frac{\partial y_i}{\partial y_j}$ nul pour $j > i$. On a donc les équations

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial y_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial y_1}{\partial y_n} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n};
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0 = \dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \\
\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} = \dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n};
\end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0 = \dfrac{\partial y_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial y_{i-1}}\dfrac{\partial y_{i-1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = \dfrac{\partial y_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_{i-1}} + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial y_{i-1}}\dfrac{\partial y_{i-1}}{\partial x_{i-1}} + \dfrac{\partial y_i}{\partial x_{i-1}}, \\
\dfrac{\partial y_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial y_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial y_{i-1}}\dfrac{\partial y_{i-1}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial y_i}{\partial x_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial y_i}{\partial x_n} = \dfrac{\partial y_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial y_{i-1}}\dfrac{\partial y_{i-1}}{\partial x_n} + \dfrac{\partial y_i}{\partial x_n};
\end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0 = -\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - \ldots - \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 = -\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_{n-1}} - \ldots - \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}}, \\
\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = -\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} - \ldots - \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}.
\end{array}\right.$$

On conclut de là que le déterminant des premiers membres,

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x_i} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x_n} \\
0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}
\end{array}\right| = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n},$$

est égal au produit des deux déterminants

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
-\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} & -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & -\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & \ldots & -\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_i} & \ldots & 1
\end{array}\right| = 1,$$

et

$$\left|\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}
\end{array}\right| = R;$$

donc

$$(9) \qquad R = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ soient indépendantes entre elles, c'est que chaque fonction y_i contienne la variable x_i, et, par suite, qu'aucune des quantités $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$ ne soit nulle. Donc cette condition revient à dire qu'il faut et qu'il suffit que le déterminant R des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ ne soit pas nul.

317. *Exemples.* — I. Soient les fonctions u, v, w, données par les équations

$$u = x - y, \quad v = x - z, \quad w = xy + xz - yz - z^2.$$

Si l'on tire de la première la valeur de x et qu'on la substitue dans les deux autres, il vient

$$v = u + y - z, \quad w = u(u + y - z) - yz - z^2 = zu - v^2.$$

On a ensuite

$$y = u + v - z, \quad \text{d'où} \quad w = vu - v^2.$$

Il existe donc entre u, v, w une relation non identique, indépendante de x, y, z. Donc les trois fonctions u, v, w ne sont pas indépendantes entre elles. On voit d'ailleurs que leur déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y + z \\ 1 & 0 & x - z \\ 0 & -1 & x + y - 2z \end{vmatrix}$$

s'annule identiquement, la troisième ligne étant la différence des deux autres.

II. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des *fonctions linéaires* de $x_1, \ldots, x_n$, données par les équations à coefficients constants

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_1^n x_1 + \ldots + a_n^n x_n, \end{aligned}$$

et que le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

s'annule, alors l'une des quantités $y_1, \dots, y_n$ sera exprimable au moyen des autres, et, en désignant par $A_k^{(i)}$ le coefficient de $a_k^{(i)}$ dans ce déterminant, on aura, entre $y_1, \dots, y_n$, des relations linéaires de la forme

$$A'_k y_1 + \dots + A_k^{(n)} y_n = 0,$$

indépendantes de $x_1, \dots, x_n$.

312. Si l'on prend pour $y_1, \dots, y_n$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ d'une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables, le déterminant fonctionnel de ces quantités,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

est dit le déterminant hessien de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$, du nom du géomètre O. Hesse, qui en a introduit l'usage.

Lorsque les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ satisfont à une relation linéaire à coefficients constants, de la forme

$$c_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + c_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0,$$

le déterminant hessien s'évanouit identiquement.

§ XIII.

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL.

319. Soit z une fonction, connue ou inconnue, des variables indépendantes x, y. On veut remplacer les variables x, y par deux autres variables indépendantes p, q, liées aux premières par des relations données

$$(1) \qquad [illegible]$$

et l'on se propose d'exprimer les dérivées partielles des divers ordres de z par rapport aux anciennes variables x, y, au moyen des dérivées partielles de la même fonction par rapport aux nouvelles variables p, q.

Différentions z par rapport à la variable p, ainsi que les valeurs de x et y données par les équations (1). Il viendra

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial p} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}, \\ \frac{\partial z}{\partial q} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation (2) ne renfermera plus d'autres inconnues que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. On aura de même

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}, \\ \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}, \end{aligned}$$

$\frac{\partial x}{\partial p}$ et $\frac{\partial y}{\partial q}$ étant déjà connues par les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{\partial y}{\partial p}, \\ \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial y}{\partial q}. \end{aligned}$$

Des deux équations (2) et (3) on tirera les formules

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : 1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial z}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial q} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix},$$

qui détermineront $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ au moyen de $\frac{\partial z}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$.

Exemple. — Si l'on donne entre x, y, p, q les relations

$$x = q\cos p, \quad y = q\sin p,$$

on trouvera

$$1 : \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \begin{vmatrix} -q\sin p & q\cos p \\ \cos p & \sin p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} & q\cos p \\ \frac{\partial z}{\partial q} & \sin p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -q\sin p & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \cos p & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$$

$$= -q : \left(\frac{\partial z}{\partial p}\sin p - \frac{\partial z}{\partial q}\cdot q\cos p\right) : \left(-q\sin p\cdot\frac{\partial z}{\partial q} - \cos p\frac{\partial z}{\partial p}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin p}{q}\frac{\partial z}{\partial p} + \cos p\frac{\partial z}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos p}{q}\frac{\partial z}{\partial p} + \sin p\frac{\partial z}{\partial q}.$$

Remarquons que la valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ se déduit de celle de $\frac{\partial z}{\partial x}$ par le simple changement de p en $p - \frac{\pi}{2}$.

320. Pour avoir maintenant $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, on remplacera, dans la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$, z par $\frac{\partial z}{\partial x}$. Pour avoir $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, on remplacera, dans la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$, z par $\frac{\partial z}{\partial y}$, ou bien, dans la valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$, z par $\frac{\partial z}{\partial x}$. Pour avoir la valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, on remplacera, dans la valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$, z par $\frac{\partial z}{\partial y}$.

De même, pour avoir les dérivées du troisième ordre, on remplacera, dans celles du second, z par ses dérivées du premier ordre. Et ainsi de suite.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\sin p}{q}\cdot D_p\left(-\frac{\sin p}{q}\frac{\partial z}{\partial p} + \cos p\frac{\partial z}{\partial q}\right) \\ &\quad + \cos p\cdot D_q\left(-\frac{\sin p}{q}\frac{\partial z}{\partial p} + \cos p\frac{\partial z}{\partial q}\right) \\ &= \frac{2\sin p\cos p}{q^2}\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\sin^2 p}{q}\frac{\partial z}{\partial q} \\ &\quad + \frac{\sin^2 p}{q^2}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} - \frac{2\sin p\cos p}{q}\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} + \cos^2 p\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}.\end{aligned}$$

On s'y prendrait de la même manière, si l'on voulait exprimer au moyen de nouvelles variables p, q, r les dérivées d'une fonction u des trois variables x, y, z, liées à p, q, r par des relations données.

Exemple. — Les variables x, y, z étant liées à p, q, r par les relations

$$x = r\cos p\cos q,\quad y = r\sin p\cos q,\quad z = r\sin q,$$

on se propose d'exprimer la fonction

$$\omega = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

au moyen des dérivées de u par rapport à p, q, r.

Au lieu de faire le changement de variables directement, il est plus simple de le faire en deux fois, en introduisant d'abord la variable auxiliaire $\rho = r\cos q$, ce qui donne

$$x = \rho\cos p,\quad y = \rho\sin p,$$

et l'on considérera d'abord u comme devant être exprimé au moyen de p, ρ, z. On aura alors, comme dans l'exemple du numéro précédent,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sin p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial p} + \cos p\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

puis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\sin p\cos p}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\sin^2 p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$
$$+ \frac{\sin^2 p}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} - \frac{2\sin p\cos p}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial \rho} + \cos^2 p\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}.$$

Il vient ensuite, par le changement de p en $p - \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2\sin p\cos p}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\cos^2 p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$
$$+ \frac{\cos^2 p}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} - \frac{2\sin p\cos p}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial \rho} + \sin^2 p\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}.$$

Les relations qui lient ρ, z, r, q étant toutes pareilles à celles qui lient x, y, ρ, p, on en tirera immédiatement

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{\sin q}{r}\frac{\partial u}{\partial q} + \cos q\,\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

D'après cela, la valeur cherchée de ω pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{r^2}\left[-\tang q\,\frac{\partial u}{\partial q} + \sec^2 q\,\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + r\,\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2}\right].$$

321. Supposons maintenant que l'on veuille changer aussi la fonction elle-même, et que, les nouvelles variables p, q, r étant liées aux anciennes x, y, z par les équations

$$(1)\qquad x = \varphi(p, q, r), \quad y = \chi(p, q, r), \quad z = \psi(p, q, r),$$

il s'agisse d'exprimer les dérivées partielles de z par rapport à x, y, au moyen des dérivées partielles de r par rapport à p, q.

En différentiant les équations (1) par rapport à p, il vient

$$(2)\qquad \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial \chi}{\partial p} + \frac{\partial \chi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$ dans l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p},$$

on en tire une relation entre

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \frac{\partial r}{\partial p}.$$

En différentiant les mêmes équations par rapport à q, on aura de la même manière une relation entre

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \frac{\partial r}{\partial q}.$$

Ces deux relations détermineront $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ en fonctions de p, q, r, $\frac{dr}{dp}$, $\frac{dr}{dq}$.

Pour passer au calcul des dérivées du second ordre, différentions les équations (2) par rapport à p, et substituons les valeurs de $\frac{d^2z}{dp^2}$, $\frac{d^2z}{dq^2}$, $\frac{d^2z}{dq\,dp}$ dans l'équation

$$\frac{d^2z}{dp^2} = \frac{d^2z}{dx\,dp}\frac{dx}{dp} + \frac{d^2z}{dy\,dp}\frac{dy}{dp} + \frac{dz}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) = ? \quad \left(\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dx}{dp} = 1, \quad \frac{dy}{dp} = 0\right).$$

On obtiendra alors, d'après les valeurs déjà trouvées, une relation entre les inconnues

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

et les quantités

$$p, \quad q, \quad r, \quad \frac{dr}{dp}, \quad \frac{dr}{dq}, \quad \frac{dr}{dp}.$$

En différentiant les équations (2) par rapport à q, ou bien les valeurs analogues de $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dy}{dq}$, $\frac{dz}{dq}$ par rapport à p, on obtiendra une seconde relation entre les inconnues (3) et les quantités

$$p, \quad q, \quad r, \quad \frac{dr}{dp}, \quad \frac{dr}{dq}, \quad \frac{d^2r}{dp\,dq}.$$

Enfin, en différentiant les valeurs de $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dy}{dq}$, $\frac{dz}{dq}$ par rapport à q, on aura une troisième relation entre les inconnues (3) et les quantités

$$p, \quad q, \quad r, \quad \frac{dr}{dp}, \quad \frac{dr}{dq}, \quad \frac{d^2r}{dq^2}.$$

De ces trois relations on tirera les valeurs des quantités (3) en fonction de

$$p, \quad q, \quad r, \quad \frac{dr}{dp}, \quad \frac{dr}{dq}, \quad \frac{d^2r}{dp^2}, \quad \frac{d^2r}{dp\,dq}, \quad \frac{d^2r}{dq^2}.$$

Il est facile de voir comment on passera ensuite aux dérivées des ordres supérieurs, et comment il faudrait procéder dans le cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes.

§ XIV.

THÉORÈME D'EULER SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES.

322. Une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ des variables $x, y, z, \ldots$ est dite *homogène* par rapport à ces variables, lorsque, en multipliant celles-ci par une même indéterminée t, la fonction se trouve simplement multipliée par une certaine puissance de t, en sorte qu'on ait identiquement

$$(1) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots).$$

L'exposant m de cette puissance de t est dit le *degré d'homogénéité* de la fonction.

Si l'on prend $t = \frac{1}{x}$ et que l'on pose

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right),$$

l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad f(x, y, z, \ldots) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Une fonction homogène est donc égale à une puissance de l'une des variables, multipliée par une fonction des seuls rapports des variables deux à deux.

Réciproquement, il est clair que l'équation (2) entraîne aussi l'équation (1). Donc l'équation (2) peut être prise aussi pour définition des fonctions homogènes.

On conclut de là que, si le premier membre d'une équation $f(x, y, z, \ldots) = 0$ est une fonction homogène des quantités $x, y, z, \ldots$, on pourra, en laissant de côté le système des valeurs nulles de $x, y, z, \ldots$, mettre cette équation sous la forme d'une relation entre les rapports de ces quantités. On peut donc, dans une pareille équation, remplacer les quantités $x, y, z, \ldots$ par d'autres quelconques, qui leur soient proportionnelles.

En différentiant l'équation (1) par rapport à t, il vient identiquement

$$xf'(tx) + yf'(ty) + zf'(tz) + \ldots = mt^{m-1} f(x, y, z, \ldots),$$

d'où, en faisant $t = 1$,

$$(3)\qquad xf'(x) + yf'(y) + zf'(z) + \ldots = mf(x, y, z, \ldots).$$

Donc, en faisant la somme des produits des dérivées partielles d'une fonction homogène par les variables correspondantes, on obtient la fonction elle-même, multipliée par son degré d'homogénéité.

On peut encore démontrer ce théorème, en partant de la définition donnée par l'équation (2). On a alors

$$f(x) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = x^m\left[\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{z}{x}\varphi'\left(\frac{z}{x}\right) + \ldots\right],$$

$$f'(y) = x^m \cdot \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$f'(z) = x^m \cdot \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{z}{x}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant ces équations respectivement par $x, y, z, \ldots$, faisant la somme et ayant égard à l'équation (2), on retrouve l'équation (3).

Si l'on différentie l'équation (1) plusieurs fois par rapport à t, et que l'on fasse ensuite $t = 1$, on obtiendra d'autres formules analogues à (3), quoique moins importantes. On aura ainsi, par exemple,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + \ldots$$
$$= m(m-1)f(x, y, z, \ldots),$$

que l'on peut écrire, sous forme symbolique,

$$(xD_x + yD_y + zD_z + \ldots)^2 f(x, y, z, \ldots) = m(m-1)f(x, y, z, \ldots),$$

où l'on supposera la puissance du polynôme $xD_x + yD_y + \ldots$ développée avant que l'on effectue les différentiations sur la fonction $f(x, y, \ldots)$.

EXERCICES.

I. — Différentiation des fonctions explicites.

Nota. — Les exemples dont les résultats sont indiqués pourront servir également d'exercices d'intégration.

1. $\frac{a-x}{x}$.

2. $\frac{a-bx}{x-\frac{1}{2}x}$.

3. $\frac{x}{a^2+x^2}$. — Rép. : $\frac{a-x^2}{a^2+x^2}$.

4. $\frac{3x^2+2x+1}{4x^3+3x^2+2x+4}$.

5. $\frac{x+1}{x+2}\,\frac{x+2}{x+3}\,\frac{x+3}{x+4}$. — Rép. : $\frac{2x^2+24x+28}{(x+2)^2}$.

6. $\sqrt{a+bx+cx^2}$.

7. $x^2+2\sqrt{x^2+1}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. — Rép. : $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

9. $\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$.

10. $\frac{a^3+x^3}{\sqrt{ax+x^2}}$.

11. $9bx-4a\sqrt{a-bx}$. — Rép. : $\frac{3b^2x}{\sqrt{a-bx}}$.

12. $9bx+3a\sqrt[3]{a+bx}$. — Rép. : $\frac{10b^2x}{3\sqrt[3]{a+bx}}$.

13. $\frac{2bx^2+a^3}{x^3}\sqrt{a+bx^2}$. — Rép. : $\frac{3a^2}{x^2\sqrt{a+bx^2}}$.

14. $\frac{8b^2x^2-8abx-a^2(a+2bx)}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$. — Rép. : $\frac{3a^4}{2(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$.

15. [illegible] — Rép. [illegible].

16. [illegible] — Rép. [illegible].

17. [illegible].

18. [illegible].

19. [illegible].

20. [illegible].

21. [illegible] — Rép. [illegible].

22. [illegible].

23. [illegible].

24. [illegible].

25. [illegible].

26. [illegible].

27. [illegible].

28. [illegible].

29. [illegible].

30. [illegible] — Rép. [illegible].

31. [illegible] — Rép. [illegible].

32. [illegible].

33. [illegible].

34. [illegible].

35. $x^m \log x - \frac{x^m}{m}$. — Rép. : $m x^{m-1} \log x$.

36. $\log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. — Rép. : $\frac{1}{x(1+x^2)}$.

37. $\log(x + \log x)$.

38. $\log \log(a + b x^n)$.

39. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2+2x^2} - x}{\sqrt{2+2x^2} + x} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$. — Rép. : $\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$.

40. $\log \sqrt{\frac{x^2 + ax + bx + x^2 + ax}{x^2 + ax + bx - x^2 + ax}}$. — Rép. : $\frac{3x+a}{\sqrt{(x^2+ax)^2 + bx}}$.

41. $x - \sin x \cos x$. — Rép. : $2 \sin^2 x$.

42. $\sin^n x \cos^n x$.

43. $\frac{2}{3} \sin x - \cos x^{\frac{3}{2}}$.

44. $x^2 \sin x + x \cos^2 x$.

45. $\frac{\sin x}{a + b \cos x}$. — Rép. : $\frac{a \cos x - b}{(a + b \cos x)^2}$.

46. $\frac{4}{7} \sin^2 \frac{1}{2} x - \frac{8}{9} \sin^3 \frac{1}{2} x$.

47. $\sin \frac{ax}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$.

48. $x + \log \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. — Rép. : $\frac{2}{1 + \tang x}$.

49. $3x + 3 \cot x - \cot^3 x$. — Rép. : $3 \cot^4 x$.

50. $2x \sin x + (2 - x^2) \cos x$. — Rép. : $x^2 \sin x$.

51. $\log \sqrt{\frac{1 - \cos nx}{1 + \cos nx}}$.

52. $\operatorname{Arg\,Ch} \sqrt{\frac{r - 1}{2}}$ (1).

---

(1) Trouver le résultat *a priori*.

53. $\operatorname{Arg\,Th} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

54. $\operatorname{Arg\,Th} \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\operatorname{Ch} x + 1}} = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2}$.

55. $\operatorname{Arg\,Ch} \frac{a^2 + b^2 x}{a^2 - b^2 x}$. — Rép. $\frac{\sqrt{ab}}{a - b\sqrt{x}}$.

56. $\operatorname{arc\,sin} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$. — Rép. $\frac{-1}{1 + x + \sqrt{x}}$.

57. $\operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ (¹).

58. $\operatorname{arc\,sin} \left(2x\sqrt{1 - x^2} - 1\right)$.

59. $\operatorname{Arg\,Th} \frac{b - 2ax}{\sqrt{a^2 - 4ab}}$.

60. $\operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}$. — Rép. $\frac{x}{\sqrt{a^2 - a^2 \quad b^2 - a^2}}$.

61. $\operatorname{Arg\,Sh} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}$.

62. $\operatorname{Arg\,Ch} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

63. $\frac{9x - 2ax^3}{9 - 3x^2} - \operatorname{arc\,tang} x$. — Rép. $\frac{6x^3(ax - 10a - 6)}{9 - 3x^2 + 1 - x^2} - \frac{9x}{\quad}\Big]$.

64. $\log \operatorname{tang} x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. — Rép. $\frac{1}{\sin^2 2x}$.

65. $x^{1 - \frac{1}{x} \operatorname{arc\,tan}}$.

66. $\sin x^{\quad}$.

67. $x^{\operatorname{Sh} x}$.

68. $\operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{3}}{x - 2}$. — Rép. $\frac{\sqrt{3}}{x^2 - x + 1}$.

69. $\log\left(1 + \operatorname{arc\,tang} x\right) - \log x$.

(¹) Trouver le résultat *a priori*.

70. $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} - \log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. — Rép. : $\frac{2ax^2}{x^2-a^2}$.

71. $\operatorname{arc\,sin}\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos x$. — Rép. : $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$.

72. $2\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$. — Même réponse.

73. $3b^2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{b-x}} - 3b\sqrt{2ax+bx-x^2}$. — Rép. : $4x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$.

74. $\frac{1}{\sqrt{a-1}}\log\frac{x\sqrt{a-1}+\sqrt{1+a-x^2}}{\sqrt{1+ax^2}}$. — Rép. : $\frac{1}{1+ax^2}\sqrt{1+x^2}$.

75. $\frac{1}{\sqrt{1-a}}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1-a}{1+ax^2}}$. — Même réponse.

76. $\frac{1}{\sqrt{1-a}}\operatorname{arc\,cos}\frac{a+x}{1+ax}$. — Rép. : $\frac{\sqrt{1-a^2}\sin x}{1+a\cos x}$.

77. $\log\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - 2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\sin x}$. — Rép. : $2\sqrt{2\sin x}\cos x$.

78. $\log\sqrt{x+\sin x}$. — Rép. : $\frac{\cos\frac{1}{2}x}{3+\sin x}$.

79. $\sqrt{\sin x} - \sin x - \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-\sin x}$. — Rép. : $-\sqrt{\sin x}\cos x$.

80. $-x\sqrt{2-\cos x} - 2\operatorname{arc\,cos}\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2-\sin x}}$. — Rép. : $\frac{\sin x}{\sqrt{2-\sin x}}$.

81. $x\sqrt{x^2-a^2} + a^2\log\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$. — Rép. : $2x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

82. $\log\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2-4}}{x}$. — Rép. : $\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+3}}$.

83. $-\cos x\log(\cos x+\sin x+\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin 2x}) + \sqrt{\cos 2x}$.
— Rép. : $\sin x\operatorname{arc\,cot}(\sqrt{\cos x})$.

84. $\sqrt{a-b\operatorname{tang}x}$.

85. $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\log x}$.

86. $\frac{a}{\sqrt{b+\log\sin x^2}}$.

87. [illegible]

88. $\operatorname{arc\,sin}\left(\operatorname{Th}\sqrt{1+x}\right)$.

89. [illegible]

Rép. [illegible]

90. [illegible] Rép. [illegible]

II. — Dérivées partielles et différentielles totales.

1. [illegible]

2. [illegible]

En supposant [illegible] et calculer alors les dérivées partielles de la fonction par rapport aux variables restantes.

3. $(x^3 - 2y)^2 + \sqrt{xy}$.

4. [illegible]

5. [illegible]

6. [illegible]

7. [illegible]

8. [illegible]

9. [illegible]

10. [illegible]

III. — Différentiation des fonctions implicites.

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible]

5. [illegible]

6. $\sqrt{a^2 - x^2}.\sin y + \log\frac{a-x}{a-y} = 0.$

7. $2x^2y^3 - 3xy^2 + 4y - 3x = 0.$

Calculer $D_x y$ pour $x = y = 1$.

8. $xe^y - y + 1 = 0.$

Calculer $D_x y$ pour $x = 0$.

9. $y^m = (a^2 - x^2)^n.$ — Rép. : $\frac{m\,dy}{y} + \frac{2n\,dx}{a^2 - x^2} = 0.$

10. $xy^2 + \sqrt[n]{(a^2 - x^2)^m} = 0.$ — Rép. : $\frac{y\,dx + 2x\,dy}{x} = \frac{2m\,dx}{n(a^2 - x^2)}.$

11. $y = x\log x.$ — Rép. : $x\,dy - (x + y)\,dx = 0.$

12. $y = a\cos\frac{y}{x}.$ — Rép. : $x^2dy = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{a^2 - y^2}.$

13. $\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{h} + \operatorname{arc\,sin}\frac{y}{k} = c.$ — Rép. : $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{h^2 - y^2}{h^2 - x^2}}.$

14. $x\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - h^2y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - h^2x^2} = a(1 - h^2x^2y^2).$

— Rép. : $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - h^2y^2}}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - h^2x^2}}.$

15. $\begin{cases} ax + by + cz = m, \\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = n. \end{cases}$

16. $y^x - x^y = 0.$

17. $z^3 - 3xyz + 3a\log(x^2 + y^2) = 0.$

18. $\begin{cases} z^2 + xy - a^2 = 0, \\ 3x^2 + 2yz - bx = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \sin^2 x - \cos y \sin z = 0, \\ 2y - x\tang z = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3. \end{cases}$

21. Vérifier que l'équation

$$2(x^2 - a^2)\frac{dy}{dx} + (y - x)^2 = 2(x^2 + a^2)$$

est satisfaite, lorsqu'on établit entre x et y une quelconque des relations

$$y = x = 0, \quad y = x = ax,$$

$$y = x = ax, \quad y = x = \frac{ax^2}{2} \quad \text{etc.}$$

IV. — Calcul direct d'une dérivée d'ordre quelconque.

1. $\sin x = x \cos x$.

2. $\cos x + x \sin x$.

3. $\dfrac{\sin x = x \cos x}{\cos x = x \sin x}$.

4. $\dfrac{\tan x}{a + x + \tan x}$.

5. $y = x = x^{[illegible]} x$, $u = f(x)$. Calculer y pour $x = a$.

6. $y = \sin x$, $u = f(x)$. Exemple $u = \sin x$, $\cos x$, etc.

7. $y = \sin^m u$, $u = f(x)$, m [illegible] x. Exemples $u = \sin x$.

8. $y = x$, $u = f(x)$. Exemple $u = ax^2 + bx$.

9. $y = \sin u$.

10. $y = \log u$. Exemple $u = \sin x$.

11. $y = x^x$.

12. $y = x^x$, d'où $y = u = x^{[illegible]}$, en posant

$$u^{[illegible]} = u^{[illegible]} = 1 \quad \text{et} \quad u = u^{[illegible]} = 1.$$

De l'identité $x^{a+b} = x^a x^b$ tirer le développement de la *factorielle* $(a+b)^{\underline{n}}$ [illegible] n° 291].

13. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Par décomposition. Discuter les divers cas, suivant la forme de n. Comparer avec le résultat obtenu sous forme de déterminant.

14. xe^x [illegible] $x \sin y = a$.

15. $ay + bx^2 + cy^2 = 0$. Cas de a, b, c constants ou variables.

V. — Changement de variables.

1. Différentier n fois $y = f(x)$, en supposant constant : 1° d^2x [illegible] 2° d^2y.

2. Transformer et différentier $\dfrac{y\,d^2x}{dx^2}$, donné pour dy constant, en supposant maintenant dx constant et dy variable.

3. En partant de la relation $y' = \frac{1}{x'}$, où $y' = \frac{dy}{dx}$, $x' = \frac{dx}{dy}$, calculer $y^{(n)}$ pour dx constant, au moyen des valeurs de x', x'', ..., x^n pour dy constant.

4. Étant donné $\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$ dans l'hypothèse de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant, revenir au cas de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ variable.

5. Transformer $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}$, en faisant $x = e^t$ et dt constant.

6. Pour $x = r\cos p$, $y = r\sin p$, on a, quelle que soit la variable indépendante t,

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = r^2\frac{d^2p}{dt^2} + 2r\frac{drdp}{dt^2}.$$

7. Soit z une fonction de x, y, déterminée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, et posons $z' = -\frac{f'_x}{f'_z}$, $z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}$. Vérifier, par le développement, que l'on a

$$\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z'_y}{\partial x} + \frac{\partial z'_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

8. Pour $x = r\cos p$, $y = r\sin p$, $f = f(x, y)$, prouver que l'on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2.$$

9. Si l'on pose

$$f = f(r, p), \quad r = \alpha(u + v), \quad p = \beta(u + v),$$

prouver que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = \alpha\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial p}.$$

10. Transformer l'expression

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

en une autre dans laquelle y et z soient les variables indépendantes.

LIVRE SECOND.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

§ I.

RELATIONS ENTRE LES ACCROISSEMENTS FINIS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE ET LES VALEURS MOYENNES DE LEURS DÉRIVÉES.

323. Si la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ conserve toujours le même signe, le signe $+$ par exemple, entre les valeurs x_0 et X de la variable (en supposant, pour fixer les idées, $x_0 < X$), la fonction $f(x) + C$ elle-même sera toujours croissante dans le même sens que la variable dans cet intervalle [204]. Si, de plus, on détermine la constante arbitraire C de manière que $f(x) + C$ s'évanouisse pour $x = x_0$, c'est-à-dire si l'on prend $C = -f(x_0)$, la fonction ainsi obtenue $f(x) - f(x_0)$, croissant à partir de la valeur zéro, sera toujours positive dans le même intervalle.

On peut encore arriver à la même conclusion en remarquant que, $f'(x)$ étant toujours positif, ainsi que dx, dans l'intervalle compris entre x_0 et X, l'intégrale définie [223]

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x) - f(x_0)$$

sera la limite d'une somme d'éléments tous positifs, et partant sera positive.

On verrait de même que, si $f'(x)$ est négatif entre x_0 et X, $f(x)-f(x_0)$ sera aussi constamment négatif dans cet intervalle.

324. Soient maintenant m et M deux constantes telles que, pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X, on ait

$$m < f'(x) < \mathrm{M}.$$

La fonction $f'(x)-m$ étant constamment positive, son intégrale

$$f(x)-f(x_0)-m(x-x_0),$$

prise entre les limites x_0 et $x \leqq \mathrm{X}$, sera [323] toujours positive, et, par une raison analogue, la fonction

$$f(x)-f(x_0)-\mathrm{M}(x-x_0)$$

sera toujours négative.

Supposons maintenant que, dans la fonction

$$f(x)-f(x_0)-\mu(x-x_0),$$

qui est continue par rapport à μ, on fasse varier d'une manière continue le paramètre μ depuis la valeur m jusqu'à la valeur M. La fonction, passant ainsi d'une valeur positive à une valeur négative, devra s'annuler une seule fois dans l'intervalle [175]. Donc, μ étant une moyenne convenablement choisie entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la fonction $f'(x)$ dans l'intervalle de x_0 à X, on aura

$$f(x)-f(x_0)-\mu(x-x_0)=0.$$

Si $f'(x)$ est continue entre x_0 et X, ou si seulement elle passe, dans cet intervalle, par toutes les valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande, il existera au moins une valeur ξ, comprise entre x_0 et X, et pour laquelle $f'(x)$ prendra la valeur μ. On pourra donc écrire [247]

$$(1) \qquad f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi), \quad (x_0<\xi<\mathrm{X});$$

ou encore, si l'on pose $x - x_0 = h$ et $0 < \theta < 1$, on aura, pour $h < X - x_0$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$

Cette formule revient à celle que nous avons obtenue au n° 247, et dont nous avons donné l'interprétation géométrique.

325. La formule (1) ou (2) fait voir que, si la dérivée $f'(x)$ est toujours finie dans l'intervalle de x_0 à X, lors même qu'elle éprouverait entre ces valeurs des solutions de continuité, l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ sera toujours infiniment petit en même temps que h, et sera toujours fini lorsque x et $x+h$ seront compris entre x_0 et X. Donc, si la dérivée d'une fonction est toujours *finie* dans un intervalle donné, la fonction elle-même sera *finie* et *continue* dans le même intervalle.

Il résulte de là que, si une dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}(x)$ est finie dans un certain intervalle, $f^{(n-1)}(x)$ sera finie et continue dans cet intervalle, et il en sera de même de toutes les dérivées précédentes $f^{(n-2)}(x), \ldots, f'(x)$, et de la fonction elle-même $f(x)$.

326. Supposons maintenant que la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ de la fonction $f(x)$ soit finie pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X, d'où il résulte [325] que toutes les dérivées précédentes et la fonction elle-même sont finies et continues dans le même intervalle; et soient m, M deux constantes telles que, pour $x_0 < x < X$, on ait toujours

$$m < f^{(n)}(x) < M.$$

La fonction $f^{(n)}(x) - m$ étant toujours positive, son intégrale prise entre x_0 et $x (x_0 < x < X)$ sera positive [324], c'est-à-dire que l'on aura

$$\int_{x_0}^{x} [f^{(n)}(x) - m]\,dx = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - m(x - x_0) > 0.$$

Par la même raison, si l'on intègre de nouveau plusieurs fois de suite entre les mêmes limites x_0 et x, on aura cette suite de

fonctions

$$\int\int f^{(n)}(x) - m]dx^2 = f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0)$$
$$- \frac{x - x_0}{1} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{1.2} \cdot m,$$

$$\int^{(3)}[f^{(n)}(x) - m]dx^3 = f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f^{(n-2)}(x_0)$$
$$- \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} \cdot m,$$

et ainsi de suite, et enfin

$$\int^{(n)}[f^{(n)}(x) - m]dx^n$$
$$= f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) - \ldots$$
$$- \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} \cdot m,$$

qui toutes seront constamment positives pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. En écrivant donc, pour abréger,

$$\int^{(n)} f^{(n)}(x)dx^n = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0)$$
$$- \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0),$$

on aura

$$\int^{(n)} f^{(n)}(x)dx^n - \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} \cdot m > 0.$$

On trouvera de la même manière

$$\int^{(n)} f^{(n)}(x)dx^n - \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} \cdot M < 0.$$

On en conclura, en raisonnant comme au n° 154, que la fonction

$$\int^{(n)} f^{(n)}(x)dx^n$$

est égale au produit de $\frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n}$ par une moyenne entre les valeurs que prend la fonction $f^{(n)}(x)$ dans l'intervalle des limites de x_0 et $x \leq$ X. Si $f^{(n)}(x)$ est continue, ou simplement, si elle passe par toutes les valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande,

cette moyenne pourra être représentée par $f^{(n)}(\xi)$, ξ étant une valeur convenablement choisie entre x_0 et x. On aura donc, sous ces conditions,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x)-f(x_0) = (x-x_0)f'(x_0) \\ &\quad - \frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\xi), \end{aligned}\right.$$

ou, en posant $x = x_0 + h$, $0 < \theta < 1$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{h}{1}f'(x_0) \\ &\quad - \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0) \\ &\quad + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta h). \end{aligned}\right.$$

327. Si, dans la formule (4), on suppose que les $n-1$ premières dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ s'évanouissent toutes pour $x = x_0$, la formule se réduira à celle-ci

$$(5)\quad f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

formule qui fait voir que, dans ce cas, à un accroissement infiniment petit h, donné à x à partir de x_0, corrrespond un accroissement de la fonction infiniment petit du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Si, de plus, $x_0 = 0$, et que $f(x_0) = f(0)$ s'évanouisse aussi, on a

$$(6)\quad f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta h);$$

donc, si une fonction et ses $n-1$ premières dérivées s'évanouissent avec la variable, la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(0)$ n'étant ni nulle ni infinie, la fonction prendra, pour une valeur infiniment petite de la variable, une valeur infiniment petite du $n^{\text{ième}}$ ordre.

$f^{(n)}$ étant la $(n-k)^{\text{ième}}$ dérivée de $f^{(k)}(x)$, la même formule

donnera

$$f^{(h)}(x) = \frac{h^{n-h}}{1.2\ldots n-h} f^{(n)}(\theta h).$$

Donc les dérivées $f'(h), f''(h), \ldots, f^{(n-1)}(h)$ sont des infiniment petits des ordres $n-1, n-2, \ldots, 1$.

328. Les formules précédentes sont des cas particuliers d'une formule plus générale, que nous allons établir, et d'où nous déduirons d'autres cas particuliers importants.

Soient $f'(x)$, $\varphi'(x)$ les dérivées de deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, et supposons que, pour $x_0 < x \leqq X$:

1° Les fonctions $f'(x)$, $\varphi'(x)$ soient toujours finies;

2° $\varphi'(x)$ ne s'annule jamais;

3° $\varphi'(x)$ soit de signe constant [ce qui serait une conséquence des deux conditions précédentes, si l'on supposait $\varphi'(x)$ continue].

En vertu des deux premières conditions, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ aura toujours une valeur finie entre x_0 et X. Soient m et M les limites, inférieure et supérieure, de cette valeur, de sorte qu'on ait

$$m < \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} < M.$$

Admettons, pour fixer les idées, que le signe constant de $\varphi'(x)$ soit le signe $+$. Les deux fonctions

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - m\right]\varphi'(x) = f'(x) - m\varphi'(x)$$

seront alors positives. Il en sera donc de même [324] de leurs intégrales prises entre les limites x_0 et x,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \quad \text{et} \quad f(x) - f(x_0) - m[\varphi(x) - \varphi(x_0)].$$

Ces deux quantités étant positives [ou, plus généralement, étant de même signe, savoir du signe de $\varphi'(x)$], leur quotient sera positif, et par suite on aura l'inégalité

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} > m.$$

En remplaçant m par M, on aurait une inégalité de sens contraire : donc la fraction $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}$ est égale à une moyenne entre m et M, et si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ est continu (ou du moins s'il passe par toutes les valeurs comprises entre la plus grande et la plus petite), il existera, entre x_0 et $x \leqq X$, au moins une valeur ξ pour laquelle ce rapport des dérivées deviendra égal au rapport des accroissements des fonctions, de sorte qu'on aura

$$7 \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

ou, en posant $x = x_0 + h$, $0 < \theta < 1$,

$$8 \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{\varphi'(x_0 + \theta h)}.$$

Si l'on suppose, en particulier, $\varphi(x) = x$, $x_0 = x_1$, d'où $\varphi'(x) = 1$, on retrouvera les formules (1) et (2) du n° 324.

329. Plus généralement, soient $f^{(n)}(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, et supposons que, pour $x_0 < x \leqq X$:

1° Les fonctions $f^{(n)}(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ soient toujours finies ;

2° $\varphi^{(n)}(x)$ ne s'annule jamais ;

3° $\varphi^{(n)}(x)$ soit de signe constant [ce qui serait une conséquence des deux conditions précédentes, si l'on supposait $\varphi^{(n)}(x)$ continue].

En vertu des deux premières conditions, le rapport $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$ aura toujours une valeur finie entre x_0 et X. Soient m et M deux constantes telles que l'on ait, dans cet intervalle,

$$m \leqq \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} \leqq M.$$

La fonction $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} - m$ étant positive, les deux fonctions

$$\varphi^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x) - m\varphi^{(n)}(x)$$

seront de même signe. Il en sera donc de même [326] des fonctions obtenues en intégrant ces dernières n fois entre les limites x_0,

et x, c'est-à-dire des fonctions

$$f^{(n)}\varphi^{(n)}(x)\,dx^n \quad \text{et} \quad f^{(n)}f^{(n)}(x)\,dx^n - m.f^{(n)}\varphi^{(n)}(x)\,dx^n;$$

donc le rapport de ces deux intégrales est positif, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{f^{(n)}f^{(n)}(x)\,dx^n}{f^{(n)}\varphi^{(n)}(x)\,dx^n} - m > 0.$$

En remplaçant m par M, on aurait obtenu un résultat négatif. On en conclut que le rapport

$$\frac{f^{(n)}f^{(n)}(x)\,dx^n}{f^{(n)}\varphi^{(n)}(x)\,dx^n}$$

a pour valeur une moyenne entre les valeurs extrêmes de $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, et par conséquent, si ce dernier rapport passe par toutes les valeurs intermédiaires entre la plus petite et la plus grande, on pourra trouver, entre x_0 et X, une valeur ξ, telle que l'on aura

$$9)\qquad \frac{f^{(n)}f^{(n)}(x)\,dx^n}{f^{(n)}\varphi^{(n)}(x)\,dx^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)},$$

ou, en développant et faisant $x = x_0 + h$,

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{h}{1}f'(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)}{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - \frac{h}{1}\varphi'(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x_0)} \\ &\quad = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{\varphi^{(n)}(x_0+\theta h)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose, en particulier, $\varphi(x) = (x - x_0)^n$, on aura [289, II]

$$\varphi(x_0) = 0,\ \varphi'(x_0) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0,\ \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(\xi) = 1.2\ldots n.$$

En substituant ces valeurs dans l'une des formules précédentes, on retrouvera les formules (3) et (4) du n° 326.

330. Si l'on a à la fois $f(x_0) = 0$, $\varphi(x_0) = 0$, les formules (7)

et (8) deviendront

$$11 \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(\xi), \quad \text{ou} \quad \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(\xi).$$

Si l'on a à la fois

$$f(x)=0, \quad f'(x)=0, \quad \ldots\ldots \quad f^{(n-1)}(x)=0,$$
$$\varphi(x)=0, \quad \varphi'(x)=0, \quad \ldots\ldots \quad \varphi^{(n-1)}(x)=0,$$

la formule (10) donnera de même

$$12 \qquad \frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} = \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\varphi^{(n)}(x+\theta h)}.$$

§ II.

THÉORÈMES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

331. Nous avons démontré (326) que, si la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ d'une fonction $f(x)$ est toujours finie et continue pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X (ces limites incluses), on a la formule

$$1 \qquad \left\{ \begin{aligned} f(X) = f(x) &+ \frac{X-x}{1} f'(x) + \frac{(X-x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots \\ &+ \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R, \end{aligned} \right.$$

ou, en faisant $X = x_0 + h$,

$$2 \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R, \end{aligned} \right.$$

le terme R, que l'on appelle le *terme complémentaire* ou le *reste* du développement, ayant pour expression

$$3 \qquad R = \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\xi) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h),$$

où l'on suppose ξ compris entre x_0 et X, ou $0 < \theta < 1$.

332. On peut donner à ce reste R une forme différente. La quantité

$$R = f(X) - f(x_0) - \frac{X - x_0}{1} f'(x_0) - \ldots - \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$

est une fonction des deux variables indépendantes x_0 et X, et puisque, en vertu de ce que nous avons admis pour établir la formule (1), les fonctions

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)$$

sont continues [325] dans le voisinage de x_0, R sera une fonction *continue* de x_0, que nous désignerons par $\psi(x_0)$.

Si l'on calcule maintenant $\frac{\partial R}{\partial x_0} = \psi'(x_0)$, on trouve que sa valeur se réduit à

$$\psi'(x_0) = -\frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x_0),$$

d'où il s'ensuit que $\psi'(x_0)$ est, comme $f^{(n)}(x_0)$, une fonction finie de x_0. On peut donc appliquer à $\psi(x_0)$ la formule (1) du n° 324, laquelle devient, en y échangeant entre elles les lettres x_0 et $x = X$, et désignant toujours par ξ une moyenne entre x_0 et X,

$$\psi(x_0) = \psi(X) + (x_0 - X)\psi'(\xi),$$

ou, en remarquant que $\psi(X) = 0$ et remplaçant $\psi'(\xi)$ par l'expression précédente, où l'on changera x_0 en $\xi = x_0 + \theta(X - x_0)$,

$$\begin{aligned}
\psi(x_0) = R &= (X - x_0) \cdot \frac{(X - \xi)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cdot f^{(n)}(\xi), \\
&= (X - x_0) \cdot \frac{[X - x_0 - \theta(X - x_0)]^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cdot f^{(n)}[x_0 + \theta(X - x_0)], \\
&= \frac{(1 - \theta)^{n-1}(X - x_0)^n}{1.2\ldots(n-1)} \cdot f^{(n)}[x_0 + \theta(X - x_0)],
\end{aligned}$$

ou enfin, en faisant $X - x_0 = h$,

$$(4) \qquad R = \frac{(1 - \theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

333. Si, dans la formule (1) ou (2), on fait $X = x$, $x_0 = 0$, d'où

$h = x$, on obtiendra la formule de Maclaurin

$$(5)\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R,$$

le reste R étant exprimé par l'une ou l'autre des deux formules

$$(6)\qquad R = \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cdot f^{(n)}(\theta x),$$

$$(7)\qquad R = \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n}{1.2\ldots(n-1)} \cdot f^{(n)}(\Theta x).$$

où θ et Θ désignent des nombres positifs et moindres que l'unité.

334. Au lieu de déduire le théorème de Maclaurin comme cas particulier de celui de Taylor, on aurait pu le démontrer directement, en supposant d'abord $x_0 = 0$ dans les raisonnements du n° 331, ce qui aurait donné les formules (5), (6) et (7).

On en aurait conclu le théorème de Taylor, en posant

$$x = X - x_0, \quad f(x) = f(X - x_0) = F(X).$$

On aura alors [303]

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(X - x_0) = D_X^n f(X - x_0) = F^{(n)}(X),$$

et comme X devient x_0 pour $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = F^{(n)}(x_0).$$

ensuite,

$$f(\theta x) = F(\xi) = F(\theta x - x_0) = F(\theta x_0 + \theta X - x_0);$$

donc

$$F(X) = F(x_0) + \frac{X - x_0}{1} F'(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \frac{(X - x_0)^n}{1.2\ldots n} \cdot F^{(n)}(\theta x_0 + \theta(X - x_0)),$$

ce qui coïncide avec la formule (1) du n° 331.

335. La formule de Maclaurin sert à développer une fonction $f(x)$ en une série infinie, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable x, pourvu que le reste R décroisse

indéfiniment, lorsque n est infiniment grand. Pour savoir si un tel développement est possible, il suffit de s'assurer que R est infiniment petit pour n infiniment grand, en discutant l'une des expressions (6) ou (7) de ce reste.

Remarquons qu'il ne suffit pas, pour la possibilité du développement, que la série donnée par la formule de Maclaurin soit convergente; car cette convergence pourrait avoir lieu sans que le reste R de la série tendît vers zéro, et alors la somme de la série ne représenterait plus la fonction proposée. Considérons, par exemple, une fonction $f(x) = \varphi(x) + \chi(x)$, composée de deux parties, et supposons que, pour $x = 0$, la partie $\chi(x)$ s'annule, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre quelconque, comme nous verrons plus tard que cela a lieu pour la fonction $e^{-x^{-2}}$. Dans ce cas, toutes les dérivées $f^{(n)}(x)$ se réduiront, pour $x = 0$, aux dérivées $\varphi^{(n)}(0)$, et la fonction $\chi(x)$ disparaîtra complétement du développement, qui ne sera plus alors que celui de la partie $\varphi(x)$. Mais, d'autre part, le reste R ne s'annulera plus pour $n = \infty$.

On voit donc que, pour que le développement soit possible, il faut et il suffit que R tende vers zéro pour n croissant indéfiniment, ce qui entraîne la convergence de la série, quoique ce ne soit pas une conséquence nécessaire de cette convergence.

336. Il y a un cas général dans lequel on peut établir que R est infiniment petit pour n infiniment grand : c'est lorsque, pour toute valeur de x inférieure numériquement à la valeur considérée de cette variable, la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ conserve toujours une valeur finie, quelque grand que soit l'indice n. Pour le faire voir, il suffit de démontrer que le facteur

$$P = \frac{x^n}{1.2\ldots n},$$

qui multiplie $f^{(n)}(\theta x)$ dans l'expression (6), décroît indéfiniment, pour n infiniment grand, quelque valeur finie que l'on donne à x.

On peut écrire, en effet, la quantité P sous les deux formes

$$P = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n-2}\cdot\frac{x}{n-1}\cdot\frac{x}{n},$$

$$P = \frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n-1}\cdot\frac{x}{n-2}\cdots\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{1},$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{x}{1.n} \cdot \frac{x}{2.n-1} \cdot \frac{x}{3.n-2} \cdots \frac{x}{n-2.3} \cdot \frac{x}{n-1.2} \cdot \frac{x}{n.1}.$$

Parmi les dénominateurs des n facteurs de cette expression, le plus petit est le produit $1.n$, dans lequel les facteurs, de somme constante $n+1$, sont le plus inégaux. On augmentera donc le second membre de l'égalité ci-dessus, en y remplaçant tous les dénominateurs par le plus petit n, ce qui donne

$$P < \left(\frac{x^2}{n}\right)^n, \quad \text{d'où} \quad P < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Or il suffira de prendre $n > x^2$ pour que $\frac{x}{\sqrt{n}}$ soit moindre que l'unité, et pour que sa $n^{\text{ième}}$ puissance puisse décroître autant que l'on voudra, pour n croissant indéfiniment au delà de cette valeur. Donc, à plus forte raison, P décroîtra indéfiniment, quel que soit x, pour n infiniment grand.

Par exemple, les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées des fonctions

$$e^x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$

étant des fonctions de même forme que les fonctions primitives, seront finies, quelque valeur que l'on donne à x. Donc, pour toute valeur finie de x, ces fonctions sont développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances entières et positives de x.

337. Lorsque la fonction proposée est $\left\{\begin{matrix}\text{paire}\\ \text{impaire}\end{matrix}\right\}$, ses dérivées d'ordre $\left\{\begin{matrix}\text{impair}\\ \text{pair}\end{matrix}\right\}$ s'évanouissant avec la variable [288], les puissances correspondantes de x dans le développement de la fonction par la série de Maclaurin sont multipliées par des facteurs nuls, et, par conséquent, disparaissent du développement. Donc le développement d'une fonction paire ou impaire de x par la série de Maclaurin ne contient que des termes de même parité que la fonction.

338. Si l'on représente par dx l'accroissement h de la variable x,

les termes $hf'(x)$, $h^2f''(x)$, ... du développement de $f(x+h)$ deviendront identiques avec les parties principales des différentielles $df(x)$, $d^2f(x)$, ... On aura donc, en considérant dx comme un accroissement fini, et désignant par $df(x)$, $d^2f(x)$, ... ce que deviennent, dans cette hypothèse, les parties principales des différentielles correspondantes,

$$8 \quad \left\{ \begin{aligned} f(x+dx) &= f(x) + \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2f(x)}{1.2} + \ldots \\ &\quad + \frac{d^{n-1}f(x)}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d^nf(x+\theta dx)}{1.2\ldots n}, \end{aligned} \right.$$

$d^nf(x+\theta dx)$ étant la partie principale de la différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, prise en considérant θdx comme constant.

339. *Extension des théorèmes de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables.* — Nous avons vu [310] que, en posant

$$F(\alpha) = f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, \ldots),$$

on a

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x, y, \ldots), \\ F(1) &= f(x+dx, y+dy, \ldots), \\ F^{(n)}(0) &= d^nf(x, y, \ldots). \end{aligned}$$

En appliquant au développement de $F(\alpha)$ suivant les puissances de α la formule de Maclaurin [333], et faisant ensuite $\alpha = 1$, il viendra

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + \frac{1}{1}F'(0) + \frac{1}{1.2}F''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{1.2\ldots n}F^{(n)}(\theta), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &f(x+dx, y+dy, \ldots) \\ &\quad = f(x, y, \ldots) + \frac{df(x, y, \ldots)}{1} + \frac{d^2f(x, y, \ldots)}{1.2} + \ldots \\ &\qquad + \frac{d^{n-1}f(x, y, \ldots)}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d^nf(x+\theta dx, y+\theta dy, \ldots)}{1.2\ldots n}, \end{aligned}$$

$d^kf(x, y, \ldots)$ désignant la différentielle totale d'ordre k, réduite

à sa partie principale, et où l'on représente par dx, dy, ... des accroissements finis quelconques, et la différentielle

$$d^n f(x+\theta dx, y+\theta dy, \ldots)$$

étant prise en considérant θdx, θdy, ... comme des constantes.

Pour développer cette expression, on remplacera les signes de différentiation totale d, d^2, ... par leurs valeurs symboliques du n° 309, et il viendra, en écrivant maintenant h, i, ... au lieu de dx, dy, ...

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+i, \ldots)\\
&\quad = f(x, y, \ldots) + \frac{1}{1}(h\mathrm{D}_x + i\mathrm{D}_y + \ldots) f(x, y, \ldots)\\
&\qquad + \frac{1}{1.2}(h\mathrm{D}_x + i\mathrm{D}_y + \ldots)^2 f(x, y, \ldots)\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}(h\mathrm{D}_x + i\mathrm{D}_y + \ldots)^{n-1} f(x, y, \ldots)\\
&\qquad + \frac{1}{1.2\ldots n}(h\mathrm{D}_x + i\mathrm{D}_y + \ldots)^n f(x+\theta h, y+\theta i, \ldots),
\end{aligned}$$

les dérivées étant prises dans le dernier terme, comme si θ était constant.

Dans l'expression du terme complémentaire, on pourrait, comme dans le cas d'une seule variable, remplacer le facteur $\frac{1}{1.2\ldots n}$ par le facteur $\frac{1-\theta^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$.

La formule précédente suppose que $\mathrm{F}^{(n)}(\alpha)$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de α comprises entre zéro et 1, c'est-à-dire que l'expression suivante $(h\mathrm{D}_x + i\mathrm{D}_y + \ldots)^n f(x, y, \ldots)$ reste finie et continue pour tous les systèmes de valeurs des variables comprises entre $x, y, \ldots$, et $x+h, y+i, \ldots$.

340. Si l'on fait, dans la formule précédente, $x=0$, $y=0$, ..., et que l'on remplace ensuite h, i, ... par x, y, ..., on aura la formule de Maclaurin étendue au cas de plusieurs variables, et que

l'on pourra écrire sous la forme

$$f(x, y, \ldots) = f(0, 0, \ldots) + \frac{1}{1}[xD_\xi + yD_\eta + \ldots] f(\xi, \eta, \ldots)_0$$

$$+ \frac{1}{1.2}[xD_\xi + yD_\eta + \ldots]^2 f(\xi, \eta, \ldots)_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots n-1}[xD_\xi + yD_\eta + \ldots]^{n-1} f(\xi, \eta, \ldots)_0$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}[xD_\xi + yD_\eta + \ldots]^n f(\xi + \theta x, \eta + \theta y, \ldots)_0,$$

l'indice o signifiant que, après avoir effectué les différentiations, on devra partout faire $\xi = 0$, $\eta = 0$, ...

La condition de possibilité du développement est que la quantité $(xD_\xi + yD_\eta + \ldots)^n f(\xi, \eta, \ldots)$ soit finie et continue pour toutes les valeurs de ξ, η, ... comprises entre zéro et x, y, ... Il faut de plus, pour que le reste puisse être négligé, qu'il soit infiniment petit pour n infiniment grand.

341. L'accroissement d'une fonction étant développé, par le théorème de Taylor, suivant les puissances de l'accroissement h de la variable x, on peut toujours prendre h assez petit pour que, en arrêtant le développement après les n premiers termes, le dernier terme conservé soit numériquement plus grand que toute la partie négligée.

En effet, le $n^{\text{ième}}$ terme du développement de $f(x_0 + h)$, joint au reste de la série, peut s'écrire sous la forme

$$\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\left[f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h}{n} f^{(n)}(x_0 + \theta h)\right],$$

et l'on voit que, si, comme le suppose la formule de développement, la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ est toujours finie dans l'intervalle considéré, et si la valeur de $f^{(n-1)}(x_0)$ n'est pas nulle, on pourra prendre h assez petit pour que le second terme de la parenthèse soit numériquement moindre que le premier. Dès lors, l'ensemble des deux termes aura pour signe le signe du premier. Il suffira,

pour cela, de prendre

$$h = \frac{n f^{(n-1)}(x_0)}{f^{(n)}(\xi)},$$

ξ étant la valeur de x qui répond au maximum de $f^{(n)}(x)$ entre x_0 et $x_0 + h$.

On peut encore arriver à la même conclusion, en remarquant que, si l'on s'arrête au terme en h^{n-1}, cela revient à remplacer la valeur totale du reste de la série $\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)$ par $\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$. Or, si la fonction $f^{(n-1)}(x)$ est continue, comme cela résulte de la supposition que $f^{(n)}(x)$ reste finie [325], il est clair que l'on pourra prendre h assez petit pour que $f^{(n)}(x)$ ne change pas de signe entre x_0 et $x_0 + h$, et, à plus forte raison, entre x_0 et $x_0 + \theta h$. Donc ce sera le $n^{\text{ième}}$ terme qui donnera son signe à tout le reste de la série.

La même remarque s'applique aussi au cas d'un nombre quelconque de variables. Si l'on représente par αh, αi, ... les accroissements des variables x, y, ..., on pourra, dans le développement de $F(\alpha)$ suivant les puissances de α, prendre α assez petit pour que le $n^{\text{ième}}$ terme du développement l'emporte sur la somme de tous les suivants, ou pour que le terme

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \alpha^{n-1} h D_x + \alpha i D_y + \ldots)^{n-1} f(x_0, y_0), \ldots$$

donne son signe à la partie du développement qui commence à ce terme. Or, si l'on fait décroître α en laissant h, i, ... quelconques, cela revient au même que de faire $\alpha = 1$ en prenant h, i, ... suffisamment petits.

§ III.

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE MACLAURIN AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

342. *Développement de e^x.* — Pour $f(x) = e^x$, on a, quel que soit l'indice n,

$$f^{(n)}(x) = e^x,$$

d'où

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}.$$

Donc la formule de Maclaurin donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{x^n e^{\theta x}}{1.2\ldots n}.$$

$e^{\theta x}$ ayant toujours une valeur finie, on voit [336] que le terme complémentaire de ce développement est infiniment petit, quel que soit x, pour n infiniment grand.

En faisant $x = 1$, on a le développement de la valeur de e en série,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{e^\theta}{1.2\ldots n}.$$

Si l'on arrête le développement au $n^{\text{ième}}$ terme, l'erreur commise sera

$$\frac{e^\theta}{1.2\ldots n} < \frac{e}{1.2\ldots n} < \frac{3}{1.2\ldots n}.$$

Donc, à partir de $n = 3$, l'erreur sera moindre que le dernier terme conservé. Si l'on prend, par exemple, 10 termes, l'erreur sera moindre que

$$\frac{3}{1.2\ldots 10} < \frac{3}{4000000} < \frac{1}{10^6}.$$

On aurait une expression plus simple, quoique moins approchée, de la limite de l'erreur, en remarquant que l'on a [336]

$$\frac{3}{1.2\ldots n} < \frac{3}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Pour $n = 10$, cette expression donnerait pour limite de l'erreur $\frac{3}{10^5}$.

On trouve de même

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x \log a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots,$$

série convergente, quel que soit x.

Remarque. — Si l'on considère la forme sous laquelle nous avons représenté [n°s 338 et 339] la formule de Taylor dans le cas

d'une ou de plusieurs variables, on voit que cette formule peut s'écrire symboliquement ainsi :

$$f(x+h) = \left[1 + \frac{d}{1} + \frac{d^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} + \ldots\right] f(x+\theta h),$$

ou, dans le cas d'une seule variable,

$$f(x+h) = \cos(h\sqrt{-1})\, f(x+\theta h),$$

et, dans celui de plusieurs variables,

$$f(x+h, y+k, \ldots, z+l) = \cos(\ldots\sqrt{-1})\, f(x+\theta h, y+\theta k, \ldots, z+\theta l).$$

343. *Développement des fonctions hyperboliques.* — Si dans le développement de e^x on change x en $-x$, puis qu'on prenne la demi-somme et la demi-différence des deux développements, on obtiendra les développements, toujours convergents, des fonctions hyperboliques

$$\mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots.$$

344. *Développement des fonctions circulaires.* — La fonction $f(x) = \sin x$, étant une fonction impaire, s'annulera, avec toutes ses dérivées d'ordre pair, pour $x = 0$ [288]. Les dérivées d'ordre impair sont données par la formule

$$f^{(2n+1)}(x) = \sin\left[x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n \cos x,$$

d'où

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(\theta x) = (-1)^n \cos\theta x.$$

On a donc

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$
$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \cos\theta x.$$

On aurait encore pu mettre le terme complémentaire sous un

autre forme, en remarquant que

$$f^{(2n)}(\theta x) = (-1)^n \sin\theta x,$$

d'où

$$R = (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \sin\theta x.$$

On trouverait de même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2} + R,$$

où l'on a

$$R = (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \cos\theta x = (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n-1} \sin\theta x.$$

Ces deux développements, comme celui de e^x, sont convergents pour toutes les valeurs possibles de x.

345. *Développement de* $\log(1+x)$. — Pour $f(x) = \log(1+x)$, on a [289, III, et 303]

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

d'où

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \frac{f^{(n)}(\theta x)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^n}.$$

On en tire

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R,$$

le reste R ayant pour valeur

$$R = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1} \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n}.$$

Pour $0 < x \leqq 1$, la première forme du reste est infiniment petite pour n infiniment grand, le facteur $\frac{1}{n}$ étant infiniment petit, et l'autre facteur $\left(\frac{x}{1-\theta x}\right)^n$ étant infiniment petit pour $x < 1$, et tout au plus égal à l'unité pour $x = 1$.

Lorsque x est négatif, il faut avoir recours à la seconde forme

du reste. Or, pour $-1 < x < +1$, on a, Θ étant positif et < 1, $-\Theta < \Theta x < +\Theta$; d'où l'on tire $1 - \Theta < 1 + \Theta x$, et par suite $\frac{1-\Theta}{1+\Theta x} < 1$, ou tout au plus $= 1$, si Θ devient égal à zéro. Donc, si la valeur numérique de x est moindre que l'unité, le produit

$$\frac{1}{1-\Theta x} \cdot \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^{n} \cdot x^{n}$$

est infiniment petit pour n infiniment grand.

On conclut de là que le développement précédent est convergent pour toutes les valeurs de x qui satisfont aux conditions

$$-1 < x < +1.$$

Pour $x = -1$, la série serait divergente. Il en devait d'ailleurs être ainsi, puisque $f(-1)$ devient $\log 0 = -\infty$, qui ne saurait être exprimé par une série convergente.

346. En changeant x en $-x$, et prenant la demi-différence des deux expressions, il vient

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Arg\,Th} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

série convergente pour $-1 < x < +1$.

En remplaçant x par $\frac{1}{x}$, il vient, pour $x < -1$ ou $x > +1$,

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \operatorname{Arg\,Cth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \ldots.$$

347. La formule qui donne $\log\frac{1+x}{1-x}$, et qui ne contient que les puissances impaires de x, étant plus convergente que celle qui donne $\log(1+x)$, on l'emploie de préférence à celle-ci pour le calcul effectif des logarithmes des nombres. Posons, pour cela,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}, \quad \text{d'où} \quad \log\frac{1+x}{1-x} = \log(n+1) - \log n = x + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

La première formule du numéro précédent devient alors

$$(1)\quad \log(y+1) = \log y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2y+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2y+1)^5} + \ldots\right],$$

formule d'autant plus convergente que y est plus grand, et qui donnera $\log(y+1)$ lorsqu'on connaîtra $\log y$. Or on connaît $\log 1 = 0$; en partant donc de $y = 1$, puis faisant successivement $y = 2, 3, \ldots$, la formule pourra faire connaître l'un après l'autre les logarithmes de tous les nombres entiers. Ainsi l'on a

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} + \ldots\right) = 0,6931471 8\ldots.$$

Si l'on pose maintenant

$$y = \frac{a}{z}, \quad \text{d'où} \quad y+1 = \frac{a+z}{a},$$

la formule (1) devient

$$(2)\quad \log(a+z) = \log a + 2\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \ldots\right],$$

formule qui sert à calculer les logarithmes des nombres intermédiaires entre les nombres entiers, en prenant pour a l'entier le plus voisin du nombre proposé $a+z$.

Cette formule (2) sert encore pour abréger le calcul des logarithmes des nombres premiers. Ainsi, connaissant $\log 2$, et remarquant que l'on a $10^3 = 2^{10} - 24$, il viendra, en prenant $a = 1024$, $z = -24$,

$$3\log 10 = 10\log 2 - 2\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \ldots\right],$$

d'où

$$\log 10 = 2,3104926\ldots - \frac{2}{3}\left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \ldots\right] = 2,3025850 9\ldots.$$

Ensuite, à cause de $3^4 = 2^3.10 + 1$, on calculera, par la même formule,

$$\log 3 = \frac{1}{4}\log(80+1);$$

puis on aura, pour les logarithmes des nombres suivants :

$$\log 4 = 2\log 2, \qquad \log 5 = \log 10 - \log 2,$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3, \quad \log 8 = \frac{1}{3}\log 5 - 1,$$

$$\log 11 = \log 10^2 - 1 = 2\log 3,$$

$$\log 13 = \log 10^3 - 1 = \log 7 - \log 11, \quad \text{etc.} \ldots$$

On pourrait passer de là aux logarithmes décimaux, en multipliant tous les logarithmes naturels par le module

$$M = \frac{1}{\log 10} = 0,434294 48\ldots$$

mais il est plus court de les calculer directement au moyen des formules précédentes, qui deviennent, en les multipliant par M,

$$(3) \qquad L(a+1) - L(a-1) = 2M\left[\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{3(2a-1)^3} + \frac{1}{5(2a-1)^5} + \ldots\right],$$

$$(4) \qquad L(a+z) - La = 2M\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \ldots\right].$$

On a ainsi $L11 - L10 = L11 - 1 = 2M\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{3.21^3} + \ldots\right)$. En ne prenant que le premier terme de la parenthèse, dont le second terme $\frac{2M}{3.21^3}$ est $< \frac{1}{3.20^3} < \frac{1}{30000}$, on trouve

$$L11 - 1 = \frac{0,8686}{21} = 1,0414,$$

à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millième près.

Les formules (2) et (4) peuvent servir à calculer les logarithmes de tous les nombres possibles, au moyen d'une table de peu d'étendue, donnant les logarithmes des nombres entiers. Un nombre N étant donné, on prendra pour a le nombre entier le plus voisin et l'on fera $N = a + z$, z étant positif ou négatif et numériquement $< \frac{1}{2}$. Si l'on a, par exemple, une Table des logarithmes vulgaires de 100 à 1000, à huit décimales, on calculera ainsi le logarithme

d'un nombre quelconque, avec huit figures exactes, par la formule

$$\mathrm{L}\,a + z = z + \mathrm{L}a + \frac{2\,\mathrm{M}\,z}{2a + z}.$$

348. *Développement d'une puissance d'un binôme.* — Soit proposé de développer la fonction $f(x) = (1 + x)^m$. On a

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

d'où l'on tire

$$f(0) = 1,\ f'(0) = m,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+2),$$
$$f^{(n)}(\theta x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}.$$

On a donc le développement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + \mathrm{R},\end{aligned}\right.$$

le reste R étant donné par l'une ou l'autre des deux formules

$$(2)\quad \mathrm{R} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

$$(3)\quad \mathrm{R} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}.$$

On voit d'abord que la série (1) est convergente, abstraction faite du reste R, pour toutes les valeurs de x moindres numériquement que l'unité; car le rapport d'un terme au précédent,

$$(4)\quad \frac{m-n+1}{n}x = \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)x,$$

tend, pour n infiniment grand, vers la limite $x < 1$. De même, la série sera divergente pour $x^2 > 1$. Pour $x = \pm 1$, on se trouve dans le cas douteux de la règle de convergence, et la convergence de la série dépend de la valeur de m (*voir* le Mémoire d'Abel, t. I de ses *Œuvres*, p. 66).

349. Pour démontrer complétement la légitimité du développement en série infinie par la formule (1), il faut établir [335] que

le reste R tend vers zéro pour n infiniment grand, toutes les fois que l'on suppose $-1 < \theta x < +1$.

Considérons d'abord la première forme du reste, qui peut s'écrire ainsi :

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \cdot (1+\theta x)^m.$$

Si l'on suppose x positif, $1+\theta x$ sera > 1; donc $\frac{x}{1+\theta x}$ sera $< x$, et par suite < 1. On pourra donc fixer un nombre $h < 1$, tel que $\frac{x}{1+\theta x}$ soit $< h$.

Pour passer du terme de rang n du développement (1) au suivant, il faut multiplier par le facteur (4), lequel, pour une valeur de n suffisamment grande, finira par différer de x aussi peu que l'on voudra, et par être inférieur à un nombre assignable h, compris entre x et l'unité. Si l'on désigne par N la valeur de n à partir de laquelle le facteur (4) est constamment $< h$, et par P la valeur correspondante $\frac{m(m-1)\ldots(m-N+2)}{1.2\ldots N-1} x^{N-1}$ du $N^{\text{ème}}$ terme du développement, le terme de rang $n = N+p$ s'obtiendra en multipliant P par le produit de p facteurs, dont chacun est moindre que h, et par conséquent le terme

$$(5) \qquad \frac{m(m-1)\ldots(m-N-p+1)}{1.2\ldots n} x^n$$

sera moindre que Ph^p. Ce produit sera donc infiniment petit pour p ou n infiniment grand, et il en sera de même, à plus forte raison, du produit

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Or le reste R est égal à ce dernier produit, multiplié par le facteur $(1+\theta x)^m$, qui est essentiellement fini. Donc R est infiniment petit pour n infiniment grand, lorsqu'on suppose x *positif* et < 1.

Pour les valeurs négatives de x, il faut recourir à l'autre forme du reste, que l'on peut écrire ainsi :

$$R = m(m-1)(1+\Theta x)^{m-2} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n-1} x^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\Theta}{1-\Theta x}\right)^{n-1}.$$

Le premier facteur $mx(1+\Theta x)^{m-1}$ est fini. Le second facteur n'est autre chose que l'expression (5) dans laquelle on a remplacé m par $m-1$ et n par $n-1$; ce facteur est donc infiniment petit pour n infiniment grand. Quant au troisième facteur $\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^{n-1}$, nous avons vu, dans un cas analogue [345], qu'il est infiniment petit, ou du moins qu'il n'est pas infini pour n infiniment grand et $-1<x<+1$. Donc la valeur de R elle-même est infiniment petite pour n croissant indéfiniment, toutes les fois que la valeur positive ou négative de x est numériquement moindre que l'unité.

350. On déduit de la formule générale (1) les cas particuliers suivants, qui sont d'un fréquent usage :

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots.$$

On en tire le développement de $\frac{1}{(1-x)^m}$ en prenant tous les termes avec le signe $+$.

Pour $m=1, 2, 3, \ldots$, il vient

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots,$$
$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n + \ldots,$$

etc....

Ensuite,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{1} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{5} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^n}{2n-1} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^n + \ldots.$$

Ces dernières formules donnent, par exemple,

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x - \frac{1}{16}\sin^6 x - \ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^7 x + \ldots.$$

Pour avoir le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un binôme $a+b$, on donnera à l'expression $(a+b)^m$ l'une ou l'autre des deux formes

$$a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m, \quad b^m\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m,$$

suivant que a sera $> b$ ou $< b$ en valeur absolue.

351. *Développement de* arc tang x. — En posant $f(x) = \text{arc tang}\, x$, nous avons trouvé [293], pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de cette fonction, la double expression

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.2\ldots n-1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\text{arc tang}\, x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2i} 1.2\ldots n-1 \left[\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n}\right].$$

On en tire, en faisant $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = 1.2\ldots n-1 \sin\frac{n\pi}{2},$$

quantité nulle pour les valeurs paires de n. Pour n impair, égal à $2p-1$, on a

$$f^{(2p-1)}(0) = 1.2\ldots 2p-2 \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{p-1} 1.2\ldots 2p-2.$$

Donc

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{2p-1} + R,$$

le reste R ayant pour expression

$$R = \frac{1}{2p} \cdot \frac{x^{2p}}{(1+\theta^2 x^2)^p} \cdot \sin(2p\,\text{arc tang}\,\theta x + p\pi)$$

$$= \frac{(-1)^p}{2p} \cdot \left(\frac{x^2}{1+\theta^2 x^2}\right)^p \cdot \sin(2p\,\text{arc tang}\,\theta x).$$

Pour $x^2 \leqq 1$, les deux derniers facteurs de cette expression sont infiniment petits ou finis, et le premier $\frac{1}{2p}$ infiniment petit pour p infiniment grand. Donc R est infiniment petit, et la formule de développement est valable pour toutes les valeurs de x telles que l'on ait

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

On peut le démontrer encore au moyen de la seconde expression du reste

$$R = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \cdot \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right].$$

Par des transformations algébriques, on peut mettre la quantité $\frac{1}{(x-i)^n}$ sous la forme

$$\frac{1}{(x-i)^n} = u + vi, \quad \text{d'où résulte} \quad \frac{1}{(x+i)^n} = u - vi,$$

et par conséquent

$$R = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \cdot v.$$

Or la quantité $u^2 + v^2 = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ n'est évidemment pas infinie. Il en est donc de même, à plus forte raison, de v, d'où l'on conclut que R est infiniment petit pour n infiniment grand.

Pour $x^2 \gtreqless 1$, $\frac{1}{x^2}$ sera $\lesseqgtr 1$, et la formule précédente donnera le développement de arc tang $\frac{1}{x}$ suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; et, comme on a arc tang $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} -$ arc tang x, on en conclura

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots.$$

352. Cette série fournit les moyens les plus prompts pour le calcul du rapport π de la circonférence au diamètre. On pourrait, en faisant $x = 1$, obtenir directement le développement de arc tang $1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$. Mais il est facile de former des

développements beaucoup plus convergents, en employant le procédé qui suit :

Soit x une fraction assez petite pour que l'on puisse calculer aisément la valeur de l'arc $\varphi = \operatorname{arc\,tang} x$. Les formules connues de la Trigonométrie fourniront, au moyen de $\operatorname{tang}\varphi = x$, les valeurs des tangentes des multiples successifs de φ, et l'on finira par obtenir un multiple $m\varphi$, dont la tangente différera peu de l'unité, et qui sera, par conséquent, très-voisin de $\frac{\pi}{4}$. On aura maintenant la tangente du petit arc $\frac{\pi}{4} - m\varphi$ au moyen de la formule

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - m\varphi\right) = \frac{1 - \operatorname{tang} m\varphi}{1 + \operatorname{tang} m\varphi},$$

et l'on pourra, dès lors, calculer cet arc au moyen de sa tangente. Connaissant actuellement φ et $\frac{\pi}{4} - m\varphi$, on en déduira aisément $\frac{\pi}{4}$.

Prenons, par exemple, $x = \frac{1}{5}$, d'où

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots.$$

On aura ensuite $\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tang} 4\varphi = \frac{120}{119}$; cette dernière valeur étant très-peu différente de l'unité, on en tirera

$$\operatorname{tang}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239},$$

d'où l'on déduit $4\varphi - \frac{\pi}{4}$ à l'aide d'une série très-convergente. Ce procédé est dû à John Machin († 1751).

On pourrait simplifier un peu le calcul, en partant de

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{10},$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{20}{99}, \quad \operatorname{tang} 2\alpha = \varphi = \frac{1}{515},$$

ce qui permet de calculer facilement arc tang $\frac{1}{5}$ au moyen de arc tang $\frac{1}{10}$.

353. *Développement de* Thx, *de* Coth$x$, *de* Coséch$x$, *de* Séch$x$ *et des fonctions circulaires correspondantes.* — I. Nous avons vu [293, VII] que, en posant $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, on trouve, pour $x = 0$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

n étant > 1, et B_{2n-1} désignant les nombres de Bernoulli. On aura donc, par la formule de Maclaurin, en faisant, pour plus de simplicité,

$$A_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n},$$

le développement suivant :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_{2n-1} x^{2n} + \ldots,$$

et cette série sera convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à 2π, ainsi que nous le verrons plus tard dans la théorie des variables complexes (Livre II, Chap. IV, § III).

On tire de là, pour $2x < 2\pi$, ou pour $x < \pi$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x + 1} &= \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + \ldots + A_{2n-1} x^{2n} + \ldots \\ &\quad - \left(1 - \frac{1}{2}.2x + A_1.2^2 x^2 + \ldots + A_{2n-1}.2^{2n} x^{2n} + \ldots\right),\end{aligned}$$

d'où, en réduisant et divisant par x,

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - (2^2 - 1) A_1 x - \ldots - (2^{2n} - 1) A_{2n-1} x^{2n-1} - \ldots$$

On en tire

$$1 \quad \begin{cases} \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 1 + \dfrac{2}{e^{2x}-1} \\ \qquad = 2^{2}(2^{2}-1)A_1 x + \ldots + 2^{2n}(2^{2n}-1)A_n x^{2n-1} + \ldots \end{cases}$$

En remplaçant dans cette formule x par $\frac{1}{2}x$, on a, pour $x < \pi$,

$$2 \quad \operatorname{Th} x = 2^{2}(2^{2}-1)A_1 x - \ldots + 2^{2n}(2^{2n}-1)A_n x^{2n-1} + \ldots$$

Si, dans l'expression de $\frac{x}{e^{x}-1}$, on change x en $2\pi - x$, il vient

$$1 - \frac{x}{e^{x}-1} = \frac{xe^{x}}{e^{x}-1} = 1 - \frac{1}{2}x - A_1 x^{2} - \ldots - A_n x^{2n+1} - \ldots,$$

on en tire, en ajoutant ce développement au premier et divisant par x,

$$\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = 2\left(\frac{1}{x} + A_1 x + \ldots + A_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots\right),$$

d'où, en changeant x en $2x$, on tire, pour $x < \pi$,

$$3 \quad \operatorname{Coth} x = \frac{1}{x} + 2^{2}A_1 x + \ldots + 2^{2n}A_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots$$

On a ensuite, en ayant égard à la formule (1), qui donne $\operatorname{Th}\frac{x}{2}$,

$$\operatorname{Cosech} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x} - \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\operatorname{Sh} x} = \operatorname{Coth} x - \operatorname{Th}\frac{x}{2},$$

c'est-à-dire, pour $x < \pi$,

$$4 \quad \operatorname{Cosech} x = \frac{1}{x} - 2^{2}(2^{2}-1)A_1 x + \ldots + 2^{2n}(2^{2n}-1)A_n x^{2n-1} + \ldots.$$

Des formules $\cos x = \operatorname{Ch} xi$, $\sin x = \frac{1}{i}\operatorname{Sh} xi$, que nous définirons plus tard (§ V de ce Chapitre), on tire

$$\tan x = \frac{1}{i}\operatorname{Th} xi, \quad \cot x = i\operatorname{Coth} xi, \quad \operatorname{cosec} x = i\operatorname{Cosech} xi.$$

Donc, en posant

$$a_{2n-1} = \frac{B_{n-1}}{1.2\ldots 2n},$$

on tirera des formules (2), (3), (4), pour les mêmes limites respectives de la valeur de x,

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} x = 2^2(2^2-1)a_1 x + \ldots + 2^{2n}(2^{2n}-1)a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots, \\ \cot x = \frac{1}{x} - 2^2 a_1 x - \ldots - 2^{2n} a_{2n-1} x^{2n-1} - \ldots, \\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2(2^2-1)a_1 x + \ldots + (2^{2n-1}-1)a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots. \end{cases}$$

II. Si l'on pose

$$\operatorname{Séch} x = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = y,$$

on aura

$$e^{2x}y = 2e^x - y,$$

d'où [293, I]

$$e^{2x}(D_x + 2)^n y = 2e^x - D_x^n y,$$

formule qui fera connaître successivement les dérivées de y, puis les valeurs de ces dérivées pour $x = 0$. Substituant ces dernières dans la formule de Maclaurin, on obtiendra, pour $x < \frac{\pi}{2}$, le développement de $\operatorname{Séch} x$, lequel ne renfermera que des puissances paires de x.

On a ensuite $\operatorname{séc} x = \operatorname{Séch} xi$, d'où l'on conclura, pour $x < \frac{\pi}{2}$, le développement de la sécante circulaire.

Nous déterminerons plus tard [537] entre quelles limites ces divers développements sont convergents.

§ IV.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES SÉRIES. — USAGE DE L'INTÉGRATION POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES. — MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

354. Supposons qu'une série ordonnée suivant les puissances positives et entières d'une variable x soit *absolument convergente* pour $x = X$, c'est-à-dire que, pour cette valeur de x, sa conver-

gence subsiste lorsqu'on prend les termes avec leur valeur absolue. Je dis que cette série sera convergente pour toute valeur de x numériquement moindre que X.

En effet, pour que la série

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

soit convergente, il faut que la limite supérieure du rapport d'un terme au précédent, pour n infiniment grand, ne surpasse pas l'unité, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a_n X^n}{a_{n-1} X^{n-1}} < 1,$$

ou en supposant, quel que soit n, $\frac{a_n}{a_{n-1}} > \lambda$, que l'on ait

$$X < \frac{1}{\lambda}.$$

Si l'on prend maintenant $x < X$, on aura certainement $x < \frac{1}{\lambda}$, et, par suite, dans la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

le rapport d'un terme au précédent, $\frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}}$, sera, quel que soit n, moindre que l'unité. Donc, pour $x < X \leq \frac{1}{\lambda}$, la série (1) est absolument convergente.

Ainsi la série (1), ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable, est absolument convergente pour toutes les valeurs de x telles que l'on ait

$$-\frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{\lambda}.$$

Pour les limites $\pm \frac{1}{\lambda}$ elles-mêmes, on ne peut rien affirmer en général, puisque alors le rapport d'un terme de la série au précédent a pour limite l'unité, et qu'on se trouve ainsi dans le cas douteux de la règle de convergence.

335. Une même fonction n'est développable que d'une seule manière en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable.

Soient, s'il est possible, deux développements différents d'une même fonction,

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

convergents l'un et l'autre pour toutes les valeurs de x inférieures à X en valeur numérique. Ces deux développements devant avoir des limites égales pour toutes les valeurs de $x < \mathrm{X}$, on devra avoir, pour ces valeurs,

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = \varepsilon_n,$$

ε_n étant la différence des restes de ces séries, et, par suite, devant être, comme ces restes, infiniment petit pour n infiniment grand, quel que soit $x < \mathrm{X}$. On peut maintenant, quelque grande que soit la valeur choisie pour n, prendre x assez petit pour que l'ensemble des termes $(a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n$ soit aussi petit que l'on voudra, et il en résultera que $a_0 - b_0$ est égal à la différence de deux infiniment petits. Donc $a_0 - b_0$, ne dépendant ni de n, ni de x, est rigoureusement nul [162].

L'égalité se réduit alors à

$$x[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}] = \varepsilon_n;$$

pour que le premier membre soit infiniment petit, quel que soit $x < \mathrm{X}$, il faut que la parenthèse soit infiniment petite, d'où l'on conclut, comme précédemment, que $a_1 - b_1 = 0$. En continuant ainsi, on verra que tous les coefficients des deux séries doivent être égaux chacun à chacun.

356. Lorsqu'une série ordonnée par rapport aux puissances entières et positives d'une variable est convergente, les dérivées des termes, prises par rapport à cette variable, forment aussi une série convergente.

En effet, en différentiant les termes de la série (1), on obtient la série

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,$$

dans laquelle le rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{na_n x^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{a_{n+1}}{a_n}x,$$

à pour limite supérieure [illegible] qui est plus petite que l'unité, si l'on suppose x compris entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

357. Considérons une série dont les termes sont des fonctions quelconques de la variable x, et supposons cette série convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et X (ces limites incluses), de sorte que, en posant

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n,$$

la fonction R_n soit infiniment petite pour n infiniment grand, quel que soit x entre les limites données. Si l'on intègre les deux membres de cette équation entre les limites x_0 et X, on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} u_n\,dx + \int_{x_0}^{X} R_n\,dx.$$

Le second membre est une série dont tous les termes sont des fonctions de X, et dont le terme complémentaire $\int_{x_0}^{X} R_n\,dx$ est égal [247] au produit de $X - x_0$ par une valeur moyenne de la fonction R_n, c'est-à-dire par une moyenne entre des quantités qui sont toutes infiniment petites pour n infiniment grand. Donc ce terme complémentaire est infiniment petit pour n infiniment grand, et, par conséquent, la série

$$\int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} u_n\,dx + \ldots$$

converge vers la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

Donc, si une série est convergente, la série des intégrales de ses termes, prises dans les limites de la convergence, est aussi convergente, et a pour somme l'intégrale de la somme de la série proposée.

Remarque. — La réciproque de cette proposition ne serait pas vraie dans tous les cas : par exemple, la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

est convergente (345) pour $x = 1$, tandis que la série des dérivées de ses termes,

$$-1 - x - x^2 - \ldots - x^{n-1} - \ldots,$$

ne serait pas convergente pour cette valeur de x.

On démontre encore que la série

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x, autre qu'un multiple pair de π, tandis que la série des dérivées

$$-\sin x - \sin 2x - \ldots - \sin nx - \ldots$$

n'est convergente pour aucune valeur de x.

358. Mais, si la série des dérivées des termes du développement d'une fonction $f(x)$ est convergente, elle aura pour somme la dérivée $f'(x)$ de cette fonction. Soit, en effet,

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n$$

une fonction développable en série convergente, et considérons la série

$$\varphi(x) = u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n + \varphi_n,$$

dont les termes sont les dérivées des termes de la précédente, et qui est convergente entre les limites x_0 et X de x. On aura, d'après le numéro précédent, en intégrant entre les limites x_0 et $x \leqq X$, et désignant par des indices placés en haut et en bas d'une quantité renfermée entre crochets la différence des valeurs que prend cette quantité, lorsqu'on y remplace la variable tour à tour par ces deux indices,

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = [u_0 + u_1 + \ldots + u_n]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \varphi_n\,dx$$

$$[f(x) - R_n]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \varphi_n\,dx$$

$$f(x) - f(x_0) = [R_n]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \varphi_n\,dx.$$

Or, d'après ce qu'on a supposé sur la convergence des deux séries,

R_n et ρ_n sont infiniment petits lorsque n est infiniment grand, pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X, et il en résulte que la quantité $-R_n + \int_{x_0}^{x} \rho_n dx$ est infiniment petite dans les mêmes circonstances, et que, étant égale à une quantité $\int_{x_0}^{x} \varphi(x) dx - f(x)$, indépendante de n, elle doit être rigoureusement nulle. On a donc

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x) dx,$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \varphi(x),$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

359. Toutes les fois qu'une fonction est développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable, son développement coïncide avec celui qui résulterait de la formule de Maclaurin.

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction développable en une série convergente de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

La série des dérivées premières de ses termes sera convergente entre les limites $\pm \frac{1}{\gamma}$ [356], et aura pour somme $f'(x)$ [358]. Par la même raison, les séries des dérivées secondes, troisièmes, ..., $k^{\text{èmes}}$, ... des termes du développement proposé auront pour sommes respectives $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(k)}(x), \ldots$. Donc

$$f'(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(x) = 1.2.a_2 + 2.3.a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x) = 1.2\ldots k.a_k + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tous ces développements subsistant pour $x = 0$, on en tire [354]

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = 1.a_1,\ f''(0) = 1.2.a_2,\ \ldots,\ f^{(k)}(0) = 1.2\ldots k.a_k,\ \ldots$$

et, par suite,

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \quad \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1.2\ldots k}, \quad \ldots.$$

Donc le développement proposé est identique avec celui que fournirait l'application du théorème de Maclaurin.

360. *Démonstration du théorème de Taylor par l'intégration.* — Supposons la fonction $f(x)$ finie, ainsi que ses dérivées successives, entre les limites x_0 et X. On a identiquement [283, II], en posant $X - x_0 = h$,

$$f(X) - f(x_0) = \int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx = \int_0^h f'(X - x)\,dx.$$

On en tire, en intégrant par parties, à cause de $X - h = x_0$,

$$\int_0^h f'(X - x)\,dx = hf'(x_0) + \frac{1}{1}\int_0^h f''(X - x).x\,dx,$$

$$\frac{1}{1}\int_0^h f''(X - x).x\,dx = \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) + \frac{1}{1.2}\int_0^h f'''(X - x).x^2\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\int_0^h f^{(n-1)}(X - x).x^{n-2}\,dx$$

$$= \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0) + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(X - x).x^{n-1}\,dx.$$

En ajoutant toutes ces égalités, et effaçant les termes qui se détruisent, il vient

$$f(X) = f(x_0) + \frac{h}{1}f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0) + R,$$

le reste R ayant pour expression l'intégrale définie

$$(1) \qquad R = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(X - x).x^{n-1}\,dx,$$

ou, en changeant $X - x$ en x [283, II],

$$(2) \qquad R = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_{x_0}^{X} f^{(n)}(x)(X - x)^{n-1}\,dx.$$

Il est facile de tirer de cette forme du reste les formes déjà obtenues [331 et 332], et une infinité d'autres analogues. On a, en effet, en appliquant la formule du n° 283, V, et prenant d'abord $\varphi(x) = f^{(n)}(x)$, $\chi(x) = (X - x)^{n-1}$,

$$\int_0^X (X - x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx = \frac{X^n}{n}\,[illegible],$$

d'où

$$R = \frac{X^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}[illegible] X.$$

ce qui est la formule du n° 331. En prenant

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x), \quad \chi(x) = (X - x)^{n-1} e^{\theta(X-x)}, \quad \theta = 1,$$

il vient

$$\int_0^X [illegible]\,dx = X^n [illegible],$$

d'où

$$R = \frac{X^n}{1.2\ldots n-1} f^{(n)}[illegible] X - \frac{1}{1.2\ldots n-1} f^{(n)}(\theta X)[illegible],$$

formule du n° 332.

Plus généralement, si l'on fait, pour p positif et $\leq n$,

$$\varphi(x) = f^{(p)}(x), \quad \chi(x) = (X - x)^{n-p},$$

on trouvera la formule

$$R = \frac{X^p}{1.2\ldots n-1}\,[illegible]\,\frac{X^{n-p}}{p}\,[illegible] - \frac{1}{1.2\ldots n-1}\,[illegible]\,f^{(p)}(\theta X)[illegible],$$

dont les deux précédentes sont des cas particuliers, correspondants à $p = n$ et $p = 1$.

En supposant $x_0 = 0$, $X = x$, on aurait trouvé de même, pour le reste de la série de Maclaurin,

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n-1}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n-1}\int_0^x f^{(n)}(x)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

361. *Méthode de l'intégration des séries.* — Lorsqu'on est

parvenu, par un moyen quelconque, à développer la dérivée d'une fonction en série convergente, on obtient, par l'intégration de cette série [357], le développement de la fonction elle-même en une série également convergente.

Exemples. — I. Soit la fonction $f(x) = \log(1 + x)$, d'où $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. On a, par une formule connue d'Algèbre élémentaire,

$$\frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x},$$

et, en intégrant entre les limites zéro et x,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x},$$

formule qui pourrait servir au calcul de l'intégrale $\int \frac{x^n\,dx}{1+x}$. En appliquant le théorème du n° 283, V, l'intégrale R, qui représente le reste de la série, prendra la forme

$$R = (-1)^n \frac{1}{1+\xi} \int_0^x x^n\,dx = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+\xi} = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+\theta x},$$

quantité qui tend vers zéro pour n infiniment grand, toutes les fois que l'on a $-1 < x \leqq +1$. On retrouve ainsi, plus simplement, les résultats du n° 345.

II. En remplaçant, dans la formule (1), x par x^2, on a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

d'où, en intégrant à partir de $x = 0$,

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{1+x^2},$$

formule qui peut servir à trouver $\int \frac{x^{2n}\,dx}{1+x^2}$. On en tire, pour l'ex-

pression du reste de la série [83, V] :

$$R = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{x^2} x^{n-1}\,\frac{1+x^2}{x^2-1}\,dx,$$

quantité infiniment petite pour n infiniment grand et $x^2 < 1$.

III. Si l'on prend $f(x) = \arcsin x$, on aura [350]

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots,$$

série convergente pour toute valeur de x numériquement < 1. On en tire, en intégrant [357] à partir de $x = 0$,

$$x \sin x = \frac{x^2}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, d'où l'on tire

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5.2^4} + \ldots + \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2n+1.2^{2n}} + \ldots$$

formule qui pourrait servir au calcul de π.

362. Ce procédé fournit le développement en série de certaines transcendantes non réductibles aux fonctions élémentaires.

I. Soit la fonction $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, qui exprime la longueur de l'arc de lemniscate au moyen du rayon vecteur. On a, pour x, numériquement < 1,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \ldots$$

d'où

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^9}{9} + \ldots$$

II. Considérons la transcendante connue sous le nom de *loga-*

rithme intégral.

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dx}{\log x} = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

On a (342)

$$\frac{e^t}{t} = \frac{1}{t} + 1 + \frac{t}{1.2} + \frac{t^2}{1.2.3} + \ldots,$$

d'où, en intégrant entre les limites $t = -\infty$ et $t = \log x$,

$$\operatorname{li} x - \operatorname{li} 0 = C + \log\log x + \frac{\log x}{1} + \frac{\log x^2}{1.2.2} + \frac{\log x^3}{1.2.3.3} + \ldots,$$

la constante C ayant pour valeur 0,57721566....

III. On trouverait de même, pour le développement de la transcendante $\int_0^x e^{-x^2} dx$,

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{1}{1}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{x^5}{5} - \ldots.$$

363. *Méthode des coefficients indéterminés.* — Lorsqu'on s'est assuré, par un moyen quelconque, qu'une fonction remplit les conditions nécessaires pour être développable en série ordonnée suivant les puissances de la variable, on peut éviter le calcul, souvent pénible, des dérivées successives, qu'exigerait l'emploi de la formule de Maclaurin, en se servant de la méthode des *coefficients indéterminés*, dont nous allons donner une idée, en l'appliquant à l'exemple suivant.

Soit proposé de développer la fonction $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. La théorie des quantités complexes nous apprend qu'elle est développable suivant les puissances positives de x pour toutes les valeurs de x numériquement moindres que l'unité. Nous pouvons donc poser, dans cette hypothèse de $x^2 < 1$,

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

d'où

$$\arcsin x = \sqrt{1-x^2}\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots).$$

En différentiant les deux membres (356, 358), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)$$
$$+ \sqrt{1-x^2}\left(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\right)$$

d'où

$$1 = x\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)$$
$$+ (1-x^2)\left(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\right)$$
$$= a_1 + \left(a_0 + 4a_2\right)x + \left(a_1 + 9a_3\right)x^2 + \ldots + \left(a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1}\right)x^n + \ldots$$

En identifiant les deux membres de cette égalité, on trouve les relations

$$1 = a_1, \quad a_0 + 4a_2 = 0, \quad a_1 + 9a_3 = 0, \quad \ldots, \quad a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0, \quad \ldots.$$

D'ailleurs $f(0) = 0 = a_0$, d'où l'on conclut d'abord, comme on aurait pu le faire *a priori* [337], que tous les coefficients d'indices pairs sont nuls. On a ensuite

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_5 = \frac{2.4}{3.5}, \quad a_7 = \frac{2.4.6}{3.5.7}, \quad \ldots,$$

d'où l'on tire le développement

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots + \frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

§ V.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE, ET LEURS FONCTIONS INVERSES.

364. De l'équation (80)

$$\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_{p+q}$$

il résulte que la fonction $\mathbf{e}_p$ jouit de la propriété générale exprimée par l'équation fonctionnelle

$$\varphi(p) \cdot \varphi(q) = \varphi(p+q),$$

laquelle caractérise, comme on sait, les exponentielles réelles. On est ainsi conduit à rapprocher la fonction 1_p de la fonction exponentielle.

Or, si l'on développe en série l'expression

$$1_p = \cos p + i \sin p,$$

on trouve [344]

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} - \frac{p^2}{1.2} - \frac{ip^3}{1.2.3} + \frac{p^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

ce que l'on peut écrire [76] sous la forme

$$1_p = 1 + \frac{(ip)}{1} + \frac{(ip)^2}{1.2} + \frac{(ip)^3}{1.2.3} + \frac{(ip)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre chose que le résultat obtenu lorsque, dans le développement de l'exponentielle [342],

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

on remplace x par ip.

Si donc on prend cette série, qui est toujours convergente, pour nouvelle définition de l'exponentielle réelle e^x, la même définition, appliquée au cas où l'on remplace x par ip, donnera pour résultat 1_p. Il est donc naturel de désigner cette quantité 1_p par le symbole e^{ip}, ce qui permet alors de faire rentrer l'équation

$$1_p . 1_q = 1_{p+q}, \quad \text{ou} \quad e^{ip} . e^{iq} = e^{i(p+q)}$$

dans la règle établie pour la multiplication des exponentielles à exposant réel.

Nous pouvons donc désormais renoncer à l'emploi des notations spéciales 1_p, r_p, pour représenter les quantités complexes; nous les remplacerons par

$$e^{ip}, \quad re^{ip}.$$

Remarquons les valeurs particulières suivantes, qui résultent de

cette définition. On a [illegible] quelconque :

[illegible]

365. Si dans l'équation de définition (1) on remplace x successivement par deux quantités quelconques u, v, on obtient des séries convergentes, même pour des valeurs complexes de u et de v [72]. En leur appliquant la règle de la multiplication des séries, le résultat obtenu est identique avec la série (1), dans laquelle on aurait remplacé x par $u+v$; c'est-à-dire que l'exponentielle à exposant complexe quelconque, définie par l'équation (1), satisfait, comme l'exponentielle réelle, à l'équation

[illegible]

Donc les exponentielles à exposant complexe sont soumises, pour la multiplication, à la même règle que les exponentielles à exposant réel. On aura aussi, par conséquent,

[illegible]

n étant une quantité réelle quelconque.

Si l'on remplace la quantité réelle n par une quantité complexe quelconque v, nous prendrons pour définition de $(e^u)^v$ l'équation

[illegible]

Remarquons ici que, dans l'exponentielle e^u, la variable u, qui forme l'exposant, est donnée par elle-même, et que, si l'on met l'exponentielle sous la forme r_p ou re^{ip}, l'argument p, qui est le coefficient de i dans $u = q + ip$, doit être complétement déterminé, et non plus seulement connu à un multiple de 2π près. C'est à cette condition que, d'après la remarque de la fin du n° 83, l'élévation de e^u à une puissance incommensurable ou complexe quelconque est une opération déterminée et uniforme.

366. Étudions maintenant les propriétés de la fonction exponentielle e^z, dont l'exposant est une quantité complexe $z = x + iy$. D'après l'article précédent, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

d'où l'on voit que cette expression se présente elle-même sous la forme d'une quantité complexe, dont e^x est le module et y l'argument.

On a de plus [364]

$$e^{z+2\pi i} = e^z . e^{2\pi i} = e^z . 1 = e^z;$$

donc l'exponentielle e^z ne change pas de valeur, lorsqu'on augmente la variable z d'un multiple quelconque de $2\pi i$. On dit, pour cette raison, que e^z est une fonction *périodique* de z, dont l'indice de périodicité ou la *période* est $2\pi i$.

Représentons géométriquement cette périodicité. Soit $z = x + iy$ un point quelconque du plan, y étant d'abord supposé positif et $< 2\pi$ (*fig.* 23). Si l'on mène par ce point une parallèle à l'axe Oy,

Fig. 23.

et que, de part et d'autre de z, on porte sur cette parallèle, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, on obtiendra une suite indéfinie de points

$$\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, z_3, \ldots,$$

pour lesquels la fonction e^z aura la même valeur. Et réciproquement, il est aisé de voir que ces points sont les seuls pour lesquels e^z ait la valeur considérée.

Si de part et d'autre de l'origine O on porte de même, sur l'axe

des y à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, et que par les points de division on mène des parallèles à Ox, ces parallèles partageront le plan en bandes horizontales, de hauteur 2π, et de longueur indéfinie dans les deux sens. Chacune de ces bandes comprendra évidemment un des points $\ldots, z_{-1}, z, z_1, \ldots$, et un seul. Ces points seront placés de la même manière dans leurs bandes respectives, de sorte que deux de ces points viendront coïncider l'un avec l'autre, si l'on fait glisser l'une des bandes le long de l'axe Oy, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur l'autre.

Il résulte de là que, dans chacune de ces bandes, la fonction z parcourt la série complète des valeurs dont elle est susceptible, et qu'elle y prend chaque valeur une seule fois.

On verrait absolument de la même manière que la fonction e^{iz} est également périodique, sa période étant la quantité réelle 2π. On représenterait géométriquement cette périodicité comme nous venons de le faire pour la fonction e^z, à cela près que les bandes, au lieu d'être parallèles à l'axe des x, le seraient à l'axe des y.

367. Des équations [69 et 364]

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p, \quad e^{-ip} = \cos p - i \sin p$$

on tire, pour p réel,

$$\cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2}, \quad \sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Ce sont là les formules d'Euler pour l'expression des fonctions circulaires en exponentielles imaginaires.

En les comparant aux formules du n° 275, qui définissent les fonctions hyperboliques, on voit qu'elles n'en diffèrent que par le changement de x en xi et par le diviseur i qui affecte le sinus, de sorte que l'on aura, entre les deux classes de fonctions, les relations

$$\cos xi = \operatorname{Ch} x, \quad \sin xi = \frac{1}{i} \operatorname{Sh} x, \quad \operatorname{tang} xi = \frac{1}{i} \operatorname{Th} x,$$

et réciproquement

$$\operatorname{Ch} x = \cos xi, \quad \operatorname{Sh} x = \frac{1}{i} \sin xi, \quad \operatorname{Th} x = \frac{1}{i} \operatorname{tang} xi.$$

Si à la variable réelle p on substitue une variable complexe z, nous prendrons pour *définitions* des fonctions $\cos z$ et $\sin z$ les équations

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

On a ensuite, en remplaçant z par $x + iy$,

$$\begin{aligned} e^{\pm iz} &= e^{\pm i(x+iy)} = e^{\pm iy}(\cos x \pm i \sin x) \\ &= e^{\pm y} e^{\pm iy}(\cos x \pm i \sin x)(\mathrm{Ch}\, y \mp \mathrm{Sh}\, y), \end{aligned}$$

d'où l'on tire, comme au n° **275**,

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \cos x\, \mathrm{Ch}\, y - i \sin x\, \mathrm{Sh}\, y, \\ \sin(x + iy) &= \sin x\, \mathrm{Ch}\, y + i \cos x\, \mathrm{Sh}\, y. \end{aligned}$$

Ainsi le cosinus et le sinus d'une quantité complexe se ramènent aussi à la forme complexe.

Par un calcul semblable à celui que nous venons de faire, on obtiendrait, pour les valeurs du cosinus et du sinus de la somme de deux quantités complexes u et v, des formules identiques à celles que l'on établit, par cette voie ou par une autre, pour le cosinus et le sinus de la somme de deux arcs réels.

368. Les exponentielles e^{iz}, e^{-iz}, dont les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont formées par addition et soustraction, ayant l'une et l'autre pour période 2π, ces fonctions elles-mêmes auront aussi pour période 2π, de sorte qu'on aura, k étant un entier quelconque,

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur 2π, les deux fonctions $\cos z$ et $\sin z$ prendront, dans chacune de ces bandes, la totalité de leurs valeurs.

Mais on ne pourra plus dire, comme pour une exponentielle unique, que ces fonctions ne passent qu'une seule fois par la même valeur dans la même bande. En effet, l'équation de définition

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

donne évidemment la relation

$$\cos(-z) = \cos z,$$

ou, plus généralement, quels que soient les entiers k, k',

$$\cos\left(z + 2k\pi\right) = \cos\left(z + 2k'\pi\right).$$

On a donc la même valeur de $\cos z$ non-seulement pour les points

$$\ldots, z - 4\pi, z - 2\pi, z, z + 2\pi, \ldots$$

disposés, à la distance 2π les uns des autres, sur une même parallèle à Ox, mais encore pour les points

$$\ldots, -z - 4\pi, -z - 2\pi, -z, -z + 2\pi, \ldots$$

symétriques des précédents par rapport à l'origine O, et disposés, à la même distance mutuelle, sur une autre parallèle à Ox.

On en conclut que la fonction $\cos z$ prend *deux fois* dans chaque bande la totalité de ses valeurs, et l'on voit aisément que les deux valeurs égales dans une même bande sont situées symétriquement par rapport au milieu du segment que cette bande intercepte sur l'axe Ox.

On pourrait de même discuter directement la fonction $\sin z$. Mais il est plus simple de remarquer que, à cause de [illegible] 364, on a

$$\sin z = \frac{1}{2}\left[e^{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)i} - e^{-\left(z - \frac{\pi}{2}\right)i}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)i} - e^{\left(-z + \frac{\pi}{2}\right)i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)i} - e^{-\left(z - \frac{\pi}{2}\right)i}\right] = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

On aura donc non-seulement

$$\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(z + 2k\pi\right),$$

mais encore, à cause de $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sin z = \cos\left(-z - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-z - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\pi - z\right),$$

d'où l'on conclura que la fonction $\sin z$ prend deux fois dans chaque bande la totalité de ses valeurs.

369. La fonction

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1};$$

elle est donc liée à e^{2iz} par une équation du premier degré, et elle aura la même période π que cette exponentielle, de sorte qu'on aura, quel que soit l'entier k,

$$\operatorname{tang}(z + k\pi) = \operatorname{tang} z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur π, $\operatorname{tang} z$ prendra dans chaque bande la totalité de ses valeurs, et chaque valeur une seule fois.

370. Ce que nous venons de dire des fonctions circulaires s'appliquerait aux fonctions hyperboliques

$$\operatorname{Ch} z = \cos iz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Sh} z = \frac{1}{i}\sin iz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{Th} z = \frac{1}{i}\operatorname{tang} iz = \frac{\operatorname{Sh} z}{\operatorname{Ch} z},$$

au changement près de l'indice de périodicité 2π en $2\pi i$ et des bandes horizontales en bandes verticales.

On verrait que ces fonctions sont périodiques, comme les fonctions circulaires. Seulement leur période est imaginaire; elle est $2\pi i$ pour les fonctions Ch et Sh, et πi pour la fonction Th.

371. Occupons-nous maintenant des fonctions inverses des fonctions exponentielles et circulaires.

Nous avons vu [366] que la fonction e^z prend la totalité de ses valeurs et chaque valeur une seule fois, lorsqu'on fait varier z dans l'étendue d'une bande horizontale, de largeur égale à 2π. Réciproquement, étant donnée *a priori* une valeur complexe quelconque $w = u + iv$ de la fonction e^z, nous allons voir que l'on peut toujours assigner à z une valeur qui satisfasse à l'équation $e^z = w$, et de cette valeur nous en déduirons une infinité d'autres.

En effet, si l'on identifie les deux membres de l'équation

$$e^{z} = w, \quad \text{ou} \quad e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y) = u + iv,$$

il vient

$$e^{x} \cos y = u, \quad e^{x} \sin y = v,$$

d'où l'on tire

$$x = \log \sqrt{u^2 + v^2}, \quad y = \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u},$$

le logarithme étant pris dans le sens arithmétique, et $\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u}$ indiquant celui des arcs positifs ou π dont la tangente $= \frac{v}{u}$ et dont le cosinus et le sinus ont respectivement les mêmes signes que u et v.

Maintenant, le cosinus et le sinus ne changeant pas lorsqu'on augmente l'arc de 2π, on voit que l'on pourra prendre pour y la valeur précédente, augmentée d'un multiple quelconque de 2π, ce qui donne

$$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} + 2k\pi.$$

Si l'on appelle donc, par analogie avec les quantités positives, *logarithme* de la quantité w la fonction inverse de l'exponentielle, c'est-à-dire l'exposant z correspondant à l'exponentielle $e^z = w$, on aura, pour l'expression générale de ce logarithme,

$$(1) \qquad \log w = \log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} + 2k\pi i,$$

les fonctions logarithme et arc tangente du second membre étant prises dans leur sens arithmétique et restreint, tandis que le logarithme du premier membre est pris dans le sens le plus général, au point de vue des quantités complexes.

Lorsqu'il y aura lieu de craindre une confusion entre ces deux manières de considérer le logarithme, on pourra employer, avec Cauchy, des doubles parenthèses pour désigner le logarithme pris dans le sens généralisé, et écrire, par exemple, $\log((u + iv))$.

Si la valeur de l'exponentielle $e^z = w$ était donnée sous la forme r_p ou re^{ip}, on trouverait immédiatement, d'après les principes du

n° 366.

$$(2) \qquad \log(re^{ip}) = \log r + ip + 2k\pi i,$$

d'où l'on pourrait déduire la formule (1).

En particulier, si w est une quantité réelle et positive, alors $p = 0$, $r_p = r$, et l'on a

$$\log(r_p) = \log r + 2k\pi i.$$

Ainsi, au point de vue des quantités complexes, une quantité réelle et positive a une infinité de logarithmes, dont un seul réel, celui qui coïncide avec le logarithme arithmétique.

Si w est une quantité négative, $p = \pi$, d'où

$$\log(-r) = \log r + (2k+1)\pi i.$$

On voit par là que le logarithme d'une variable négative $-r$ se présente sous la forme du logarithme de la valeur arithmétique de la variable prise positivement, augmenté d'une constante imaginaire représentant $\log((-1))$ [**271**].

372. D'après ce qu'on vient de voir, les valeurs représentées par les formules (1) ou (2) ont toutes la même partie réelle, et sont disposées, une dans chaque bande, sur une même parallèle à l'axe des y, comme les diverses valeurs de z dans la figure du n° **366**.

On voit par cet exemple comment la fonction inverse d'une fonction périodique est une fonction *multiforme*, admettant, pour chaque valeur de la variable, une infinité de déterminations, qui diffèrent entre elles par des multiples d'un même intervalle constant.

373. Considérons maintenant la fonction $z = \operatorname{arc\,tang} w$, inverse de la tangente

$$w = \operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

Cette équation de définition donne

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}.$$

En faisant $w = re^{ip}$, on a, d'après le n° 371,

$$z = \operatorname{arc\,tang} re^{ip} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + re^{ip}}{1 - re^{ip}} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + re^{i}}{1 - re^{i}};$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2r \cos p}{1 - r^2} + \frac{i}{4} \log \frac{1 + 2r \sin p + r^2}{1 - 2r \sin p + r^2} + k\pi.$$

Si l'on avait donné w sous la forme $u + iv$, on aurait eu

$$\operatorname{arc\,tang} u + iv = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2u}{1 - u^2 - v^2} + \frac{i}{4} \log \frac{1 + 2v + u^2 + v^2}{1 - 2v + u^2 + v^2} + k\pi.$$

Les fonctions inverses du cosinus et du sinus, pour des valeurs complexes de ces dernières quantités, se calculeraient de la même manière. Seulement leurs valeurs sont plus compliquées et d'un usage moins fréquent.

374. Les règles de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, sur lesquelles sont fondées celles de la différentiation et de l'intégration, étant les mêmes pour les quantités complexes que pour les quantités réelles, ce que nous avons dit sur les procédés généraux de différentiation et d'intégration des quantités réelles s'appliquera aussi aux fonctions complexes d'une variable réelle.

D'abord les règles de la différentiation et de l'intégration des fonctions algébriques se démontreront comme dans le cas des quantités réelles, et nous avons pu déjà les employer sans aucun changement (par exemple, au n° 290, II).

Pour les exponentielles imaginaires, on a

$$d.e^{ix} = d.(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x\, dx$$
$$= (\cos x + i \sin x)\, i\, dx = e^{ix} i\, dx,$$

formule qui est la même que si i était un nombre réel.

On a ensuite, pour une exponentielle à exposant complexe,

$$d.e^{(a+bi)x} = d.(e^{ax} e^{bix}) = de^{ax}.e^{bix} + e^{ax}.de^{bix}$$
$$= e^{(a+bi)x}(a + bi)\, dx,$$

ce qui donne une règle identique avec celle de la différentiation des exponentielles réelles.

On en déduit, réciproquement,

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C = \frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{(a+bi)x} + C,$$

d'où l'on tire, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

On retrouve ainsi, d'une manière plus directe, les résultats obtenus au n° 285, V.

On en conclut encore

$$D_x^n . e^{(a+bi)x} = (a+bi)^n e^{n(a+bi)x};$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire, et posant

$$A = a^n - n_2 a^{n-2}b^2 + n_4 a^{n-4}b^4 - \ldots,$$

$$B = n_1 a^{n-1}b - n_3 a^{n-3}b^3 + n_5 a^{n-5}b^5 - \ldots,$$

on tire

$$D_x^n . e^{ax}\cos bx = e^{ax}(A\cos bx - B\sin bx),$$

$$D_x^n . e^{ax}\sin bx = e^{ax}(A\sin bx + B\cos bx).$$

Plus simplement, si l'on pose

$$a + bi = ke^{li},$$

il vient

$$D_x^n . e^{(a+bi)x} = k^n e^{(lx+nl)i};$$

d'où [293]

$$D_x^n . e^{ax}\cos bx = k^n e^{ax}\cos(bx + nl),$$

$$D_x^n . e^{ax}\sin bx = k^n e^{ax}\sin(bx + nl).$$

Nous nous occuperons plus tard de ce qui concerne la différentiation et l'intégration des fonctions d'une variable complexe

$$z = x + iy,$$

où x et y varient indépendamment l'un de l'autre.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

§ I.

VRAIES VALEURS DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS UNE DES FORMES INDÉTERMINÉES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ETC.

375. Si la fonction y est déterminée par une équation de la forme

$$(1) \qquad f(x) - y\varphi(x) = 0,$$

et que, pour une certaine valeur a de x, les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ s'évanouissent à la fois, l'équation (1) sera satisfaite en combinant avec la valeur a de x une valeur quelconque de y, de sorte que cette équation cesse, pour $x = a$, de déterminer directement la valeur de y.

Cependant, pour toute valeur de x autre que a, l'équation (1) donne pour y une valeur $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, qui est déterminée, et la série de ces valeurs, de part et d'autre de $x = a$, forme une suite continue, qui n'est interrompue que pour la valeur même $x = a$. Pour rétablir la continuité, à laquelle les fonctions qui représentent les phénomènes réels sont généralement astreintes, on prendra, pour la valeur de y correspondante à $x = a$, la *limite* vers laquelle tend y, lorsque x diffère infiniment peu de a, c'est-à-dire la quantité

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

pour h infiniment petit. Cette limite sera dite la *vraie valeur* de la fonction y pour $x = a$.

Pour obtenir maintenant cette limite, comme on ne peut pas faire la substitution directe de $x = a$, on cherchera une fonction qui soit identiquement égale à $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ pour toute valeur de x autre que a, ou du moins qui diffère infiniment peu de cette fonction pour x infiniment voisin de a, et dans laquelle on puisse faire la substitution directe [166].

376. On peut souvent déterminer une fonction identiquement égale à la proposée et dans laquelle la substitution de $x = a$ puisse s'effectuer, en supprimant un facteur commun aux deux termes du rapport.

Exemples.—I. Si m et n sont deux nombres entiers et positifs, les deux termes du rapport

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

sont divisibles par $x - a$, et ce rapport, quel que soit x autre que a, est identique au rapport

$$\frac{x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}}{x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}},$$

dont la valeur, pour $x = a$, est $\frac{m}{n} a^{m-n}$. Telle est donc la vraie valeur du rapport proposé, pour $x = a$.

II. On a identiquement, pour x différent de zéro,

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x} = \cot \frac{1}{2} x,$$

quantité qui devient infinie pour $x = 0$; donc la fraction proposée a l'infini pour vraie valeur correspondante à $x = 0$.

Quelquefois on peut faciliter la recherche du facteur commun, en employant certaines transformations algébriques. Par exemple :

III. Soit proposé de trouver la vraie valeur de la fraction

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

pour $x = a$. Multiplions les deux termes de la fraction par $\sqrt{x} + \sqrt{a}$. On aura la fraction

$$\frac{x - a - \sqrt{x}\sqrt{x - a} + \sqrt{a}\sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})},$$

dont les deux termes sont évidemment divisibles par $\sqrt{x - a}$, ce qui donne

$$\frac{\sqrt{x - a} - \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x + a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})},$$

et cette dernière quantité prend, pour $x = a$, la valeur $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

377. Souvent on a recours au développement en série des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ suivant les puissances du facteur commun infiniment petit qui doit diviser les deux termes de la fraction, et l'on pousse le développement assez loin pour mettre en évidence dans chaque terme les infiniment petits de l'ordre le moins élevé qui doivent subsister après les réductions; puis on divise les deux termes par la plus haute puissance du facteur infiniment petit qui puisse les diviser tous les deux, après quoi on égale ce facteur à zéro.

Exemples. — I. Les exposants m et n étant quelconques, et $x = a - h$, on a (348 et 340)

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{(a - h)^m - a^m}{(a - h)^n - a^n} = \frac{\left(1 - \frac{h}{a}\right)^m - 1}{\left(1 - \frac{h}{a}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{m\frac{h}{a} - m\,\frac{h^2}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)^{m-2}}{n\frac{h}{a} - \frac{n}{2}\frac{h^2}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)^{n-2}};$$

en divisant les deux termes par $\frac{h}{a}$, puis faisant $h = 0$, cette expres-

sion devient égale à $\frac{m}{n} a^{m-n}$, comme dans le cas particulier traité dans le numéro précédent.

II. On a [350]

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(1 + \frac{h}{2a} - \ldots\right) - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}},$$

ou, en réduisant et divisant par $\sqrt{h}$,

$$= \frac{\frac{\sqrt{h}}{2a} + \ldots + 1}{\sqrt{2a+h}},$$

quantité dont la limite pour $h = 0$ est $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, les termes non écrits du développement s'évanouissant tous pour $h = 0$.

III. La fonction

$$\frac{\operatorname{tang} nx - n \operatorname{tang} x}{n \sin x - \sin nx},$$

qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$, devient en développant [353 et 344]

$$\frac{nx + \frac{1}{3}n^3x^3 + \ldots - n\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right)}{n\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\right) - nx + \frac{1}{6}n^3x^3 + \ldots},$$

expression qui se réduit à

$$\frac{\frac{1}{3}(n^3 - n)x^3 + \ldots}{\frac{1}{6}(n^3 - n)x^3 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3}n^2 - n^2 + \ldots}{\frac{1}{6}n^2 - n^2 + \ldots},$$

les termes non écrits s'évanouissant avec x. Donc la limite de l'expression, pour $x = 0$, est égale à $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$, quel que soit le nombre n.

378. Une autre méthode générale pour la recherche des vraies valeurs est fondée sur la différentiation.

Nous avons vu [330] que, si $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ sont continues dans le voisinage de $x = a$, h étant supposé assez petit pour que $\varphi'(x)$ ne change pas de signe et ne s'évanouisse pas entre $x = a$ et $x = a - h$, on a, dans le cas de $f(a) = \varphi(a) = 0$,

$$\frac{f(a-h)}{\varphi(a-h)} = \frac{f'(\theta)}{\varphi'(\theta)}.$$

On en tire, toutes les fois que $\varphi'(a)$ n'est pas nul,

$$\lim \frac{f(a-h)}{\varphi(a-h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Donc la limite du rapport de deux fonctions qui s'évanouissent simultanément pour $x = a$ est égale au rapport des valeurs de leurs dérivées pour $x = a$.

Dans le cas où $\varphi'(a)$ serait nul, sans que $f'(a)$ le fût, on remarquerait que l'on a alors

$$\lim \frac{\varphi(a-h)}{f(a-h)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0,$$

d'où l'on conclut que la limite de $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ est ∞, c'est-à-dire qu'elle est encore donnée par la valeur du rapport $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$. Donc la règle précédente donne la vraie valeur, toutes les fois que l'une au moins des quantités $f'(a)$, $\varphi'(a)$ n'est ni nulle ni infinie.

Exemple. — Soit la fraction $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ pour $x = a$. En prenant les dérivées des deux termes, on trouve

$$\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{m-n},$$

dont la limite pour $x = a$ est $\frac{m}{n} a^{m-n}$.

379. Si $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ s'annulent à la fois, soit n le plus petit indice pour lequel $f^{(n)}(a)$ et $\varphi^{(n)}(a)$ ne sont pas tous deux nuls. On

aura [330, (12)]

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{\varphi^{(n)}(a+\theta h)}, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}.$$

Donc, si le rapport des premières dérivées se présente lui-même sous la forme $\frac{0}{0}$, on continuera à différentier un même nombre de fois les deux termes de la fraction, jusqu'à ce que l'on parvienne à deux dérivées $f^{(n)}(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ qui ne s'annulent pas simultanément pour $x = a$.

Exemple. — On a ainsi, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$

380. Remarquons que l'emploi de la règle précédente est susceptible de plusieurs simplifications.

D'abord, le théorème qui ramène la recherche de la limite de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ à celle de la limite de $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$ s'applique aussi à chacun des rapports

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \quad \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)},$$

qui tous ont la même limite commune $f^{(n)}x : \varphi^{(n)}(x)$. Si donc on peut trouver une fonction identique avec l'un quelconque de ces rapports, ou seulement infiniment peu différente de ce rapport pour x voisin de a, mais admettant un calcul plus simple, on pourra substituer cette nouvelle fonction au rapport de dérivées, et continuer sur elle le calcul.

Ainsi, dans l'exemple du numéro précédent, le rapport des premières dérivées, $\frac{\sin x}{2 \sin x \cos x}$, est identiquement égal à $\frac{1}{2\cos x}$, et celui-ci a évidemment pour limite $\frac{1}{2}$.

Soit encore, pour $x = a$, la fraction $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Sa

limite sera égale à

$$\lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}} \qquad \lim\left(\frac{\sqrt{x-a}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-a}}{2x\sqrt{x-a}}\right)$$

$$\lim \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-a}{x-a}}.$$

La valeur de cette dernière expression s'obtiendra, soit en divisant les deux termes de la fraction par $x-a$, soit en appliquant à la quantité sous le radical la règle de la différentiation [378].

Remarque. — L'équation

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} \ldots \lim \frac{f^{(m)}(a+h)}{\varphi^{(m)}(a+h)}$$

nous apprend que, si $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ tend vers zéro, le rapport $\frac{f^{(m)}(a+h)}{\varphi^{(m)}(a+h)}$ tendra aussi vers zéro. Mais il n'en résulte nullement que le rapport de ces deux fractions infiniment petites ait lui-même pour limite l'unité. Si l'on a, par exemple,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^2}{\sin x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2x}{\cos x},$$

les limites des deux fractions seront bien égales l'une et l'autre à zéro, pour $x = 0$; mais le rapport des fractions elles-mêmes, égal à $\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{2}$, a pour limite $\frac{1}{2}$, et non l'unité.

381. Ce que nous avons dit des fonctions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ s'applique également aux fonctions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On peut enlever l'indétermination soit par la suppression d'un facteur commun aux deux termes de la fraction [376], soit en développant les deux termes en séries ordonnées suivant les puissances négatives et positives de l'accroissement de la variable à partir de la valeur critique [377], soit enfin

par l'emploi de la différentiation. On a, en effet,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

et, sous cette dernière forme, la fraction devenant $\frac{0}{0}$, on peut lui appliquer la règle du n° 378, qui donne

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{\dfrac{1}{\varphi(a+h)}}{\dfrac{1}{f(a+h)}} = \lim \frac{-\dfrac{\varphi'(a+\theta h)}{[\varphi(a+\theta h)]^2}}{-\dfrac{f'(a+\theta h)}{[f(a+\theta h)]^2}}$$

$$= \lim \frac{\varphi'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)} \times \left[\lim \frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}\right]^2.$$

Or, si la fraction $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ tend vers une limite A, qui ne soit ni nulle ni infinie, $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ tendra évidemment vers la même limite ; donc

$$A = \lim \frac{\varphi'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)} \cdot A^2, \quad \text{d'où} \quad A = \lim \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)},$$

ce qui rentre dans la règle du n° 378.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus au cas où A serait $= 0$. Alors nous considérerons la fonction $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + C$, C étant une constante quelconque, et cette fonction aura pour limite C, puisque la limite de son premier terme est zéro ; mais on peut la mettre sous la forme

$$\frac{f(x) + C\varphi(x)}{\varphi(x)},$$

et lui appliquer la règle de la différentiation, en vertu de laquelle sa limite doit être égale à celle de la fonction

$$\frac{f'(x) + C\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + C.$$

Comme d'ailleurs cette limite doit se réduire à C, il s'ensuit de là

que la limite de $\frac{f'}{\varphi'}$ doit être nulle, comme cela résulte du [illegible] ; par suite, la règle de la différentiation conduit encore à [illegible] le résultat.

On verrait, comme au n° 378, que la règle s'applique encore au cas où la valeur de $\lim \frac{f'}{\varphi'}$ est infinie.

382. La règle de la différentiation subsiste encore pour une valeur infinie de x. En effet, si l'on pose $x = \frac{1}{z}$, on aura, pour $z = 0$,

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2} \varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Remarque. — Il peut se faire cependant que cette règle soit en défaut, comme cela a lieu, par exemple, lorsque le rapport des dérivées ne tend, pour x infini, vers aucune limite déterminée. Ainsi la fonction

$$\frac{x - \cos x}{x - \sin x} = \frac{1 - \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$$

tend, pour x infini, vers la limite 1, tandis que le rapport des dérivées $\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$ est essentiellement indéterminé pour $x = \infty$.

383. Dans certains cas, comme dans celui de la fonction $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, traité au n° 380, si l'on appliquait simplement le procédé de la différentiation, sans s'aider des transformations algébriques, on passerait de la forme d'indétermination $\frac{0}{0}$ à la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et, en continuant les différentiations, cette dernière forme d'indétermination se reproduirait indéfiniment, comme cela résulte du théorème suivant.

THÉORÈME. — *Si une fonction $f(x)$ est finie et continue pour toute valeur de x voisine de la valeur* FINIE a, *et si en même temps $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, $f'(x)$ sera aussi infinie pour $x = a$.*

Soient, en effet, ε et $\varepsilon + h$ deux accroissements de même signe : $f(x)$ étant continue entre $a + \varepsilon$ et $a + \varepsilon + h$, on pourra appliquer le théorème du n° 207, qui donnera

$$\frac{f(a+\varepsilon+h) - f(a+\varepsilon)}{h} = f'(a+\varepsilon+\theta h),$$

quelque petit que soit ε. Si ε décroît indéfiniment, $f(a+\varepsilon+h)$ tendra vers la limite finie $f(a+h)$, tandis que $f(a+\varepsilon)$ tendra vers l'infini. Donc le premier membre est infiniment grand pour ε infiniment petit; il en sera donc de même de $f'(a+\varepsilon+\theta h)$, quel que soit h. Donc $f'(a+\theta h)$ est infini, quel que soit h. Or, en prenant h assez petit, $a+\theta h$ s'approchera autant que l'on voudra de a, et, comme la dérivée d'une fonction ne peut pas être infinie pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle fini [216], il faut que $a+\theta h$ se réduise à a, ou θ à zéro. Donc $f'(a) = \infty$.

On en conclut ensuite, par le même raisonnement, que toutes les dérivées suivantes, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... sont aussi infinies pour $x = a$.

384. La démonstration précédente ne s'appliquerait pas au cas de a infini, parce que, dans ce cas, $a+h$ représentant aussi bien que a l'infini, $f(a+h)$ serait infinie, aussi bien que $f(a)$; d'où il résulterait que la différence $f(a+h) - f(a)$, revêtant la forme indéterminée $\infty - \infty$ [386], ne serait pas nécessairement infinie.

Si, dans ce cas, la valeur limite $f'(\infty)$ est déterminée et finie, l'équation

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

deviendra, pour $x = \infty$, quel que soit h,

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\infty).$$

On a d'ailleurs, par la règle de la différentiation (381),

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{x-a} = f'(a).$$

On déduit de là cette formule importante, où l'on peut faire $h = 1$,

$$(1) \quad \lim_{x=a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x=a} f'(x) = 1 \quad f'(a),$$

qui peut servir à la détermination d'un grand nombre de vraies valeurs.

On en tire, par exemple, pour n positif quelconque (185),

$$\lim_{x=0} \frac{\log x}{x^n} = \frac{1}{n} \lim_{x=0} \frac{\log x^n}{x^n} = \frac{1}{n} \lim_{x=0} \frac{\log}{}$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{x=0} \log(1 + x - \log x),$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{x=0} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Si l'on fait $f(x) = \log F(x)$, la formule (1) donnera, en passant des logarithmes aux nombres, cette autre formule, susceptible d'usages analogues,

$$(2) \quad \lim_{x=a} [F(x)]^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{h=0} \left[\frac{F(a+h)}{F(a)}\right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{x=a} \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Comme exemple d'application de la formule (2), considérons les deux expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $u_n^{\frac{1}{n}}$, d'où dépend le caractère de convergence de la série dont u_n est le terme général. Si l'on pose $u_n = F(n)$, ces deux expressions deviennent $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ et $[F(n)]^{\frac{1}{n}}$, et, par suite, elles ont, d'après la formule (2), la même limite pour n infini. Donc les caractères de convergence fondés sur la considération de ces deux expressions rentrent l'un dans l'autre.

On trouverait, par la même formule, $\lim_{x=0} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=0} \frac{x+1}{x} = 1$.

385. On rencontre encore d'autres formes d'indétermination, dont le calcul se ramène aux cas que nous venons d'étudier.

Expressions de la forme $0 \times \infty$. — Supposons que, pour $x = a$, on ait

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = \infty.$$

Le produit $f(x)\varphi(x)$ pourra s'écrire sous l'une des deux formes

$$\frac{f(x)}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}, \quad \frac{\varphi(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

dont la première devient $\frac{0}{0}$, la seconde $\frac{\infty}{\infty}$, pour $x = a$.

Exemples. — I. m et n étant positifs, cherchons, pour $x = 0$, la limite de $x^m(\log x)^n$. On a [381]

$$\lim x^m(\log x)^n = \lim \frac{(\log x)^n}{x^{-m}}$$

$$= \lim \frac{n(\log x)^{n-1}}{mx^{-m-1}} = -\frac{n}{m}\lim x^m(\log x)^{n-1}$$

On est donc ramené à chercher la limite d'une expression semblable, dans laquelle l'exposant n est diminué d'une unité. En continuant de la même manière, on finira par ramener l'exposant n de $\log x$ à une valeur nulle ou négative, et alors il sera évident que la limite cherchée est nulle.

Autrement, en posant $x = e^{-y}$, on a

$$\lim x^m(\log x)^n = (-1)^n \lim_{y=\infty} \frac{y^n}{e^{my}} = (-1)^n \lim_{y=\infty}\left(\frac{y^{\frac{n}{m}}}{e^y}\right)^m.$$

Or, quel que soit l'exposant p, on a, pour y infini [382],

$$\lim \frac{y^p}{e^y} = \lim \frac{py^{p-1}}{e^y} = \lim \frac{p(p-1)y^{p-2}}{e^y} = \ldots;$$

en continuant ainsi, l'exposant du numérateur deviendra nul ou négatif. Donc la limite de la fraction est zéro.

II. On a, pour $x = a$,

$$\lim\left[\log\left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \tang\frac{\pi x}{2a}\right] = \lim \frac{\log\left(1 + \frac{x}{a}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2a}} = \lim \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}} = \frac{2}{\pi}.$$

386. *Expressions de la forme* $\infty - \infty$. — L'indétermination de pareilles expressions peut être quelquefois levée au moyen de transformations algébriques.

Par exemple, pour $x = \infty$, on a

$$\lim(x - \sqrt{x^2 - ax}) = \lim \frac{a}{x + \sqrt{x^2 - ax}} = \lim \frac{a}{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} = \frac{1}{2}a.$$

D'autres fois, si l'on a la différence de deux fractions $\frac{\lambda}{f} - \frac{\mu}{\varphi}$, dont chacune devient infinie pour $x = a$, cette différence, mise sous la forme

$$\frac{\lambda\varphi - \mu f}{f\varphi},$$

prendra l'une des formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. On a ainsi, pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim\left(x \tang x - \frac{\pi}{2}\sec x\right) = \lim \frac{x\sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim \frac{\sin x + x\cos x}{-\sin x} = -1.$$

387. Les expressions telles que $f(x)^{\varphi(x)}$ peuvent se présenter sous l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞. On ramène la recherche de la vraie valeur d'une telle expression à celle de la vraie valeur de son logarithme $\varphi(x)\log f(x)$, lequel se présente alors sous la forme $0 \times \infty$ (384).

Exemples. — I. Pour $x = \infty$, cherchons la limite de $x^{\frac{1}{x}}$. Son logarithme a pour expression $\frac{\log x}{x}$, dont la limite $= \lim \frac{1}{x} = 0$; donc la limite de $x^{\frac{1}{x}}$ est $e^0 = 1$. De même pour $\lim_{x=0} x^x$.

II. La fonction $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ a pour logarithme $\frac{\log(1-x)}{x}$, dont la limite, pour $x=0$, est $\lim_{x=0}\frac{1}{1-x}=1$, d'où $\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ [266]; et pour $x=\infty$, $\lim_{x=\infty}\frac{1}{1-x}=0$, d'où $\lim_{x=\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}}=1$.

388. Les règles précédentes peuvent servir à la détermination de l'ordre infinitésimal d'une fonction donnée $f(x)$, infiniment petite ou infiniment grande. Pour cela, on divisera la fonction par α^n, α étant la base du système d'infiniment petits ou d'infiniment grands, et l'on cherchera la vraie valeur de $\frac{f(x)}{\alpha^n}$, en déterminant l'exposant n de manière que cette vraie valeur soit finie, ou du moins qu'elle soit nulle ou infinie pour toute autre valeur de l'exposant que n [184].

Exemples. — I. Soit $f(x)=\operatorname{tang}x-\sin x$, pour x infiniment petit. On a

$$\begin{aligned}\lim\frac{\operatorname{tang}x-\sin x}{x^n}&=\lim\left(\frac{\operatorname{tang}x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}\right)\\&=\lim\frac{\operatorname{tang}x}{x}\cdot\lim\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}=\lim\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}\\&=\lim\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-2}}=\lim\frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-3}},\end{aligned}$$

quantité qui devient finie pour $n=3$; donc $\operatorname{tang}x-\sin x$ est un infiniment petit du troisième ordre.

II. Soit $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$. On a, δ étant infiniment petit en même temps que x,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x^n}&=\frac{x-\sin x}{x^n(\sqrt{x}+\sqrt{\sin x})}=\frac{\frac{1}{6}x^3(1+\delta)}{\left(1+\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)x^{n-\frac{1}{2}}}\\&=\frac{1}{6}\frac{1+\delta}{\left(1+\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)x^{n-\frac{5}{2}}},\end{aligned}$$

quantité qui a, pour $x=0$, une limite finie, lorsqu'on prend

$n = \frac{5}{2}$. Donc l'expression proposée est un infiniment petit de l'ordre $\frac{5}{2}$.

III. Pour $x = \infty$, $\frac{e^x}{x^n}$ est infiniment grand, quel que soit l'exposant n. Donc e^x est un infiniment grand d'ordre infini.

Au contraire, $\log x$, pour $x = 0$ ou $x = \infty$, est un infiniment grand d'ordre zéro.

389. Quelquefois les dérivées d'une fonction implicite se présentent sous forme indéterminée pour certaines valeurs simultanées $x = a, y = b$ de la variable indépendante et de la fonction. Ainsi, y étant donné par l'équation $f(x, y) = 0$, la dérivée

$$(1) \qquad y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsque les deux dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ s'évanouiront à la fois pour $x = a, y = b$. En considérant, dans le second membre de (1), y comme représentant sa valeur en x tirée de l'équation $f(x, y) = 0$, on pourra appliquer à ce second membre la règle de la différentiation, qui donnera

$$\lim y' = -\lim \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}},$$

d'où, à la limite,

$$y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

en remplaçant, dans l'équation du second degré, x par a, y par b. Cette équation du second degré n'est autre chose que celle que l'on obtiendrait en différentiant deux fois de suite l'équation proposée $f(x, y) = 0$, et y faisant ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si les trois dérivées partielles du second ordre s'évanouissaient, ce qui rendrait identique l'équation du second degré, on différentierait une fois de plus, ce qui conduirait à une équation du troisième degré en y', et ainsi de suite.

Exemple. — Étant donnée la relation $x^3 - 3axy + y^3 = 0$, calculer la valeur de y' pour $x = 0$, $y = 0$. On a, en différentiant une première fois,

$$x^2 - ay - ax y' + y^2 - ay y' = 0,$$

équation identique pour $x = y = 0$. En différentiant une fois de plus, on a

$$2xy'^2 + 2ay' + [2x + y^2 - ay]y'' = 0,$$

équation du second degré dont les coefficients extrêmes sont infiniment petits avec x et y, et qui admet, par suite, pour $x = y = 0$, une racine nulle et une racine infinie.

390. Considérons enfin le cas où le rapport de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ de deux variables indépendantes x, y prend, pour $x = a$, $y = b$, la forme $\frac{0}{0}$. Si nous supposons, pour un instant, que l'on établisse une relation quelconque entre x et y, on aura alors, d'après la règle de la différentiation,

$$\lim \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \lim \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}}.$$

Pour que cette limite soit déterminée, il faut qu'elle soit indépendante de la relation arbitraire que l'on a introduite, et, par suite, qu'elle ne dépende pas de $\frac{dy}{dx}$. Or il faut et il suffit, pour cela, que l'on ait la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{f}{\varphi} = 0,$$

c'est-à-dire que les deux fonctions f et φ dépendent l'une de l'autre [316], ou toutes les deux d'une troisième, qui jouera le rôle d'une variable indépendante unique. On sera alors ramené au cas précé-

[illegible]. C'est ce qui aura lieu, en particulier, si l'on a à la fois, pour $x = a$, $y = b$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{0}{0}.$$

S'il n'en est pas ainsi, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ n'aura pas de limite déterminée, lorsque ses deux termes s'évanouiront simultanément, à moins toutefois que l'on ne puisse faire disparaître par division un facteur commun aux deux termes et dont la présence causait leur annulation.

§ III.

MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

391. On dit qu'une fonction $f(x)$ prend une valeur *maximum* pour $x = a$, lorsque, pour tout accroissement infiniment petit h, donné à la variable x à partir de la valeur a, on a constamment, quel que soit le signe de l'accroissement h,

$$f(a+h) < f(a).$$

Au contraire, la valeur $f(a)$ sera un *minimum*, si l'on a

$$f(a+h) > f(a).$$

Considérons d'abord le cas du maximum, d'où l'on déduira celui du minimum par le simple changement du sens des inégalités. Si $f(a)$ est un maximum, on devra avoir, en supposant h positif,

$$f(a+h) < f(a), \quad f(a-h) < f(a).$$

Donc, si l'on fait varier x depuis une valeur un peu inférieure à a jusqu'à une valeur un peu supérieure, $f(x)$ commencera par croître jusqu'à $x = a$, puis décroîtra à partir de cette valeur. Donc, pour $x < a$, la dérivée $f'(x)$ sera positive [213], et, pour $x > a$, elle sera négative ; de sorte que, pour h infiniment petit positif, on aura

$$(1) \qquad f'(a-h) > 0, \quad f'(a+h) < 0.$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires et suffisantes pour

qu'il y ait un maximum. Donc, pour que la valeur $x = a$ corresponde à un maximum de $f(x)$, il faut et il suffit que $f'(x)$ *change de signe*, en passant *du positif au négatif*, lorsque x passe de $a - h$ à $a + h$.

On verrait de même que la condition nécessaire et suffisante du minimum est que $f'(x)$ change de signe, en passant *du négatif au positif*.

Ainsi le caractère commun du maximum et du minimum est que la dérivée de la fonction change de signe en passant par la valeur $x = a$. Or une fonction peut changer de signe de deux manières, soit en restant continue, soit en présentant une discontinuité.

392. Dans le cas de la discontinuité de $f'(x)$ (*fig.* 24), qui correspond à celui où la courbe $y = f(x)$ présente, pour $x = a$, un

Fig. 24.

rebroussement de première espèce ou un point saillant, la seule règle que donne la théorie générale consiste à examiner si la dérivée $f'(x)$ change de signe de part et d'autre de la valeur a, et dans quel sens se fait ce changement.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}.$$

La dérivée

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{(x - a)^{\frac{1}{3}}}$$

est infinie pour $x = a$. De plus, elle est négative pour $x < a$, positive pour $x > a$. Donc $x = a$ correspond à un minimum de la fonction $f(x)$.

Au contraire, la dérivée de la fonction

$$f(x) = b + (x - a)^{\frac{4}{3}},$$

savoir

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

est encore discontinue pour $x = a$; mais son signe est le même pour $x < a$ et pour $x > a$. Donc cette fonction n'a ni maximum ni minimum pour $x = a$.

393. Considérons maintenant le cas où la dérivée $f'(x)$ est continue dans le voisinage de $x = a$. Dans ce cas, elle ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative, ou *vice versa*, sans s'annuler dans l'intervalle. Donc alors on a, pour le caractère commun du maximum et du minimum, la condition *nécessaire*

$$2 \qquad f'(a) = 0.$$

Si, de plus, $f'(x)$ passe du positif à zéro, puis de zéro au négatif, cette fonction sera décroissante de part et d'autre de la valeur $x = a$. Donc sa dérivée $f''(x)$ sera négative, tant pour $x = a - h$ que pour $x = a + h$, c'est-à-dire que l'on aura, dans le cas du maximum,

$$3 \qquad f''(a-h) < 0, \quad f''(a+h) < 0.$$

Dans le cas du minimum, ces deux inégalités seraient changées de sens. Donc le caractère commun du maximum et du minimum est que les valeurs de la dérivée seconde $f''(x)$ soient de même signe de part et d'autre de $x = a$, ce signe étant négatif pour le maximum, positif pour le minimum.

La fonction $f''(x)$, devant conserver le même signe, quelque voisin que x soit de a, conservera ce même signe pour $x = a$, à moins qu'elle ne s'annule pour cette valeur. On aura donc un maximum ou un minimum toutes les fois que $f''(x)$ ne s'annulera pas pour $x = a$, et selon que l'on aura

$$4 \qquad f''(a) < 0 \quad \text{ou} \quad f''(a) > 0 \text{ [1]}.$$

---

[1] Si la différentielle $df(x)$ a une valeur fractionnaire de la forme $\frac{u}{v}dx$, la condition $df(x) = 0$ donnera $u = 0$. Pour avoir ensuite la valeur correspondante de $d^2f(x)$, il faudra prendre la différentielle de $\frac{u}{v}$, laquelle se réduira, à cause de

Si la valeur de $f''(a)$ est nulle, dans le cas du maximum, cette valeur nulle sera un maximum parmi toutes les valeurs voisines, qui sont toutes négatives de part et d'autre de $x = a$. Donc $f''(x)$ devra satisfaire, pour $x = a$, aux conditions du maximum, et par suite $f'''(a - h)$ et $f'''(a + h)$ devront être, la première positive, la seconde négative; et, si $f'''(x)$ est continue dans le voisinage de $x = a$, on devra avoir

$$f'''(a) = 0, \tag{5}$$

$$f^{\text{IV}}(a - h) > 0, \quad f^{\text{IV}}(a + h) < 0. \tag{6}$$

On en conclut que, dans le cas du maximum, $f'''(a)$ devra s'annuler, et $f^{\text{IV}}(a)$ sera généralement négative (dans le cas du minimum, elle serait positive), à moins que l'on n'ait $f^{\text{IV}}(a) = 0$, auquel cas $f^{\text{IV}}(x)$ devrait satisfaire, pour $x = a$, aux conditions du maximum (ou du minimum), et ainsi de suite.

On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un maximum ou un minimum correspondant à $x = a$ est que la première des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$ soit d'ordre *pair*. Si cette dérivée prend une valeur négative, on aura un maximum; si elle prend une valeur positive, on aura un minimum.

394. On arriverait à la même conclusion en partant de la formule (5) du n° 327. Si les $n - 1$ premières dérivées de $f(x)$ s'évanouissent pour $x = a$, et que la $n^{\text{ième}}$ dérivée soit continue dans le voisinage de $x = a$, on a

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Pour h assez petit, le second membre aura le même signe que $h^n f^{(n)}(a)$. Il changera donc de signe avec h, si n est impair, et, par

---

$u = 0$, à $\frac{du}{v}$; donc on aura, pour $x = a$,

$$d^2 f(x) = \frac{du\,dx}{v}, \quad \text{ou} \quad f''(x) = \frac{u'}{v},$$

ce qui permet souvent d'abréger les calculs.

suite, $f(a-h)$ et $f(a+h)$ seront de même signe, et la fonction n'aura ni maximum ni minimum pour $x=a$. Si, au contraire, n est pair, le signe du second membre sera celui de $f^{(n)}(a)$, quel que soit le signe de h : on aura donc un maximum ou un minimum, suivant que $f^{(n)}(a)$ sera [illegible] 0.

393. Supposons maintenant que l'on cherche les conditions de maximum ou de minimum d'une fonction implicite y, donnée par l'équation

$$1 \qquad F(x, y) = 0.$$

Si l'on a préparé l'équation (1) de manière que les deux dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ ne soient pas simultanément infinies ou nulles en même temps, on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

et, pour satisfaire aux conditions du maximum ou du minimum, il faudra que cette valeur devienne nulle ou infinie pour la valeur de x correspondante au maximum ou au minimum. Donc les valeurs de x qui *pourront correspondre* à un maximum ou à un minimum de y seront données par l'un ou l'autre des deux systèmes d'équations

$$2 \qquad F(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$3 \qquad F(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Ce dernier système (3) correspond au cas de la discontinuité de $\frac{dy}{dx}$. On verra si la valeur fournie pour x répond à un maximum ou à un minimum, en examinant, comme au n° 392, si la valeur de $\frac{dy}{dx}$ change de signe, lorsque x passe de la valeur $a-h$ à la valeur $a+h$.

Si nous considérons les valeurs provenant du système (2), qui

répond au cas de la continuité de $\frac{dy}{dx}$, l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

donne, en la différentiant et faisant ensuite $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0.$$

Le signe de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} : \frac{\partial F}{\partial y}$ nous fera connaître si la valeur trouvée pour y est un maximum ou un minimum. Si ce rapport s'évanouit, on passera à la considération des dérivées suivantes $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$, etc.

396. De même, si la fonction u est déterminée au moyen de x par trois équations entre u, x et deux autres variables y, z,

$$(1) \qquad F_1(u, x, y, z) = 0, \quad F_2(u, x, y, z) = 0, \quad F_3(u, x, y, z) = 0,$$

et que l'on demande le maximum ou le minimum de la fonction u, on différentiera les équations (1) pour en tirer la valeur de $\frac{du}{dx}$ (256), puis on égalera cette valeur à zéro, ou, ce qui revient au même, dans les différentielles des équations (1), on commencera par supposer $\frac{du}{dx} = 0$, ce qui les réduira à

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{etc.}\ldots$$

et entre ces trois équations on éliminera les inconnues auxiliaires $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ce qui conduira à l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} = 0,$$

laquelle, jointe aux trois équations (1), déterminera le système ou les systèmes de valeurs des quatre quantités u, x, y, z, qui *peuvent correspondre* à un maximum ou à un minimum de la fonction u. Pour vérifier maintenant s'il y a bien un maximum ou un minimum, et pour distinguer en même temps lequel des deux a lieu, on différentiera de nouveau les équations proposées; puis on remplacera $\frac{du}{dx}$ par zéro et $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ par les valeurs tirées des équations précédentes, et l'on obtiendra la valeur de $\frac{d^2u}{dx^2}$, que l'on discutera comme ci-dessus. Si cette valeur s'annulait, on aurait à considérer les dérivées suivantes, etc.

397. Plus généralement, soient $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, liées entre elles par les n équations

$$1 \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_n = 0,$$

et soit proposé de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction donnée $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ de ces variables. En considérant n des variables $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions de la $(n+1)^{\text{ième}}$ x, déterminées par les équations (1), on devra égaler la différentielle de f à zéro, d'où l'équation

$$2 \qquad df = 0.$$

Entre cette équation et les n équations

$$3 \qquad dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \quad \ldots, \quad dF_n = 0,$$

on éliminera les inconnues auxiliaires $\frac{dx_1}{dx}, \ldots, \frac{dx_n}{dx}$, ce qui donnera l'équation

$$4 \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x} & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x, x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

qui, jointe aux équations (1), déterminera les systèmes de valeurs de x, x_1, ..., x_n pour lesquels il peut y avoir maximum ou minimum. On calculera ensuite la valeur de d^2f, et ainsi de suite.

398. On peut, dans le cas précédent et dans les cas analogues, employer la *méthode des multiplicateurs*, qui donne souvent lieu à des calculs plus symétriques. Ajoutons à l'équation (2) les équations (3) multipliées respectivement par des facteurs indéterminés λ_1, λ_2, ..., λ_n. On obtiendra ainsi une équation qui pourra remplacer une quelconque des équations (2) et (3). On pourra maintenant disposer des n indéterminées λ_1, ..., λ_n de manière à faire disparaître de cette équation les n inconnues auxiliaires dx_1, ..., dx_n, en posant

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0,$$

moyennant quoi l'équation se réduira à

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial x} = 0.$$

On aura ainsi $n+1$ équations, et, en éliminant entre elles les auxiliaires λ_1, ..., λ_n, on retombera sur l'équation (4) du numéro précédent.

399. *Exemples.* — I. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = \operatorname{Ch} x + \cos x.$$

L'équation $f'(x) = \operatorname{Sh} x - \sin x = 0$ n'admet pas d'autre racine réelle que $x = 0$, comme on peut s'en assurer en remplaçant $\operatorname{Sh} x$ et $\sin x$ par leurs développements en séries [343 et 344]. Pour $x = 0$, on a

$$f''(x) = \operatorname{Ch} x - \cos x = 0,$$
$$f'''(x) = \operatorname{Sh} x + \sin x = 0,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = \operatorname{Ch} x + \cos x = 2;$$

$f^{(4)}(x)$ ayant une valeur positive, on en conclut que $x = 0$ correspond à un minimum de la fonction $f(x)$, lequel a pour valeur 2.

II. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = (x-a)^{2m}(x-b)^{2n+1}\varphi(x),$$

m et n étant des entiers positifs, et $\varphi(x)$ une fonction qui ne devient ni nulle ni infinie pour $x = a$ ni pour $x = b$. — La dérivée de la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = (x-a)^{2m-1}(x-b)^{2n}\chi(x),$$

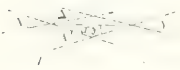
la fonction $\chi(x)$ ne devenant, en général, ni nulle ni infinie, pour $x = a$ ou $x = b$. Cette dérivée devient nulle pour $x = a$ et pour $x = b$; mais, dans le voisinage de $x = a$, elle change de signe avec la différence $x - a$, tandis que, dans le voisinage de $x = b$, elle ne change pas de signe avec $x - b$. Donc la fonction $f(x)$ a un maximum ou un minimum pour $x = a$, et n'en a point pour $x = b$. Pour $x - a$ infiniment petit, le signe de $f'(x)$ est contraire ou semblable à celui de $(a-b)^{2n}\chi(a) = (2m)(a-b)^{2n+1}\varphi(a)$, suivant que $x - a$ est négatif ou positif. On a donc un maximum ou un minimum pour $x = a$, suivant que $(a-b)\varphi(a)$ est négatif ou positif.

On peut encore, dans le cas de la continuité des dérivées de $\varphi(x)$, arriver au même résultat en calculant $f^{(2m)}(a)$, qui se réduit [291] à

$$1.2\ldots(2m)(a-b)^{2n+1}\varphi(a).$$

III. Déterminer le minimum de déviation d'un prisme réfrin-

Fig. 25.



gent. — Soient A l'angle du prisme (*fig.* 25), n son indice de

réfraction, que nous supposerons > 1; X, x les angles d'incidence et de réfraction relatifs à la première face; y, Y les angles analogues pour la seconde face; Δ l'angle de déviation, ou l'angle du premier rayon incident avec le second rayon réfracté. On a les relations

$$(1)\quad \sin X = n \sin x,\ \sin Y = n \sin y,\ x + y - A = 0,\ X + Y - A = \Delta.$$

En différentiant ces équations, et posant $d\Delta = 0$, il vient

$$\cos X\, dX = n \cos x\, dx,\ \cos Y\, dY = n \cos y\, dy,\ dx + dy = 0,\ dX + dY = 0.$$

Substituant dans les deux premières équations les valeurs $dy = -dx$, $dY = -dX$, tirées des deux dernières, et divisant membre à membre, on a

$$\frac{\cos x}{\cos X} = \frac{\cos y}{\cos Y},$$

ou, en mettant pour $\cos X$, $\cos Y$ leurs valeurs tirées des deux premières équations (1),

$$(2)\qquad \frac{\cos x}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 x}} = \frac{\cos y}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 y}},$$

d'où l'on tire, x et y devant être aigus,

$$x = y = \frac{A}{2};$$

on en conclut

$$\sin X = \sin Y = n \sin \frac{A}{2}.$$

On a ensuite, en passant aux différentielles secondes,

$$\cos X\, d^2 X - \sin X\, dX^2 = n(\cos x\, d^2 x - \sin x\, dx^2),$$
$$\cos Y\, d^2 Y - \sin Y\, dY^2 = n(\cos y\, d^2 y - \sin y\, dy^2),$$
$$d^2 X + d^2 Y = d^2 \Delta,\quad d^2 x + d^2 y = 0,$$

d'où, en faisant

$$\cos Y = \cos X,\quad \cos y = \cos x,\quad \sin X = \sin Y = n \sin x = n \sin y,$$
$$dx^2 = dy^2,\quad dX^2 = dY^2,$$

il vient

$$\cos X \,.\, d^2 \Delta = \sin X (dX^2 - dx^2),$$

et, comme $dX^2 - dx^2 = \frac{n^2}{\cos^2 X} dx^2$ est positif pour $n > 1$, on en conclut que $d^2\Delta$ est positif, et que Δ est un minimum.

IV. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction y déterminée par l'équation

$$2y^2 - 4xy + 2y - x^2 = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$x^2 - px - q = 0,$$

p et q étant des fonctions données de y.

En différentiant cette équation, il vient

$$2x - p\,dx - \left(\frac{dp}{dy}x + \frac{dq}{dy}\right)dy = 0,$$

d'où, en posant $dy = 0$,

$$2x - p = 0, \quad x = \frac{p}{2},$$

et par suite

$$-\frac{p^2}{4} + q = 0,$$

équation qui détermine les valeurs de y qui peuvent être maxima ou minima. On a ensuite, en différentiant une seconde fois l'équation proposée, et faisant alors $dy = 0$,

$$2dx - \left(\frac{dp}{dy}x + \frac{dq}{dy}\right)d^2y = 0,$$

d'où l'on tire, en remplaçant x par $-\frac{1}{2}p$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{-\frac{p}{2}\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}},$$

et le signe de cette expression fait connaître si la valeur trouvée de y est un maximum ou un minimum. Remarquons que le dénominateur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est autre chose que la dérivée de la quantité $-\frac{p^2}{4} + q$ qui s'évanouit pour la valeur maximum ou minimum de y, et qui doit être $\leqq 0$ pour toute valeur réelle de x.

On traiterait de même le cas où x et y seraient liés par une équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$.

V. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction y déterminée par l'équation

$$x^3 - 3axy - y^3 = 0.$$

En différentiant cette équation, il vient

$$(x^2 - ay)dx - (y^2 - ax)dy = 0,$$

d'où, en posant $dy = 0$,

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad x^6 - 2a^3x^3 = 0.$$

On en conclut les deux systèmes de solutions

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}, \quad \text{et} \quad x = 0, \quad y = 0.$$

En différentiant une seconde fois l'équation, et faisant ensuite $dy = 0$, le premier système de valeurs donne $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}$, et par suite ce système correspond à un maximum de y, si a est positif. L'autre système, $x = 0$, $y = 0$, rendant identique l'équation différentielle seconde

$$2x - 2ay' + 2(y'^2 + (y^2 - ax)y'' = 0,$$

on différentiera une fois de plus, ce qui donnera

$$2 - 3ay'' + 6yy'y'' + (y^2 - ax)y''' = 0;$$

d'où l'on tire, pour $x = y = 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3a}.$$

Donc, pour ce système de valeurs, il y a maximum de la fonction, si l'on suppose $a > 0$.

VI. Trouver les demi-diamètres maxima ou minima de la courbe

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h.$$

Cela revient à trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$u = x^2 + y^2.$$

On a, en différentiant ces deux équations, et posant $du = 0$,

$$(ax + by)dx + (bx + cy)dy = 0,$$

$$\frac{1}{2}du = xdx + ydy = 0.$$

Ajoutant ces deux équations après avoir multiplié la seconde par une indéterminée $-s$, puis égalant séparément à zéro les multiplicateurs des différentielles dx, dy [398], on trouve les équations

$$(1) \qquad (a - s)x + by = 0, \quad bx + (c - s)y = 0,$$

qui donnent, par l'élimination de x et de y,

$$(2) \qquad (a - s)(c - s) - b^2 = 0,$$

équation du second degré dont les deux racines sont toujours réelles, et généralement inégales. x et y étant proportionnels aux cosinus des angles que fait le diamètre cherché avec les axes coordonnés, on tire des équations (1), en y remplaçant x et y tour à tour par les deux systèmes de valeurs des angles α, β qui répondent aux deux racines s_1, s_2 de l'équation (2),

$$(a - s_1)\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 = 0, \quad b\cos\alpha_1 + (c - s_1)\cos\beta_1 = 0,$$
$$(a - s_2)\cos\alpha_2 + b\cos\beta_2 = 0, \quad b\cos\alpha_2 + (c - s_2)\cos\beta_2 = 0.$$

Multipliant les équations de la première ligne par $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, et celles de la seconde ligne par $-\cos\alpha_1$, $-\cos\beta_1$, puis les ajoutant toutes ensemble, il vient

$$(s_2 - s_1)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2) = 0,$$

ce qui démontre que les directions correspondantes aux deux racines s_1, s_2 sont rectangulaires entre elles, toutes les fois que ces racines sont inégales.

Si l'on met maintenant l'équation proposée sous la forme [322]

$$(ax + by)x + (bx + cy)y = k,$$

et que l'on remplace $ax + by$, $bx + cy$ par leurs valeurs sx, sy,

tirées des équations (1), il vient

$$s(x^2+y^2)=su=k,$$

d'où

$$u=\frac{k}{s},$$

ce qui fait connaître la valeur de u correspondante à chaque racine de l'équation (2). On pourrait former l'équation qui donnerait directement les deux valeurs de u, laquelle serait

$$\left(a-\frac{k}{u}\right)\left(c-\frac{k}{u}\right)-b^2=0.$$

Pour distinguer maintenant le maximum du minimum, formons les équations différentielles secondes, que l'on peut écrire, en vertu de (1),

$$0=(ax+by)d^2x+(bx+cy)d^2y+a\,dx^2+2b\,dx\,dy+c\,dy^2$$
$$s(x\,d^2x+y\,d^2y)+a\,dx^2+2b\,dx\,dy+c\,dy^2,$$
$$\frac{1}{2}d^2u=dx^2+dy^2+x\,d^2x+y\,d^2y.$$

Éliminant $x\,d^2x+y\,d^2y$ entre ces deux équations, on trouve, à cause de $c-s=\frac{b^2}{a-s}$,

$$d^2u=-\frac{2}{s(a-s)}[(a-s)dx+b\,dy]^2.$$

Donc d^2u a le même signe que la quantité $-s(a-s)$. Or, si l'on considère les deux racines de l'équation (2), on aura

$$-s_1(a-s_1)\times-s_2(a-s_2)=s_1s_2[a^2-a(s_1+s_2)+s_1s_2]=-b^2(ac-b^2),$$

quantité positive pour $b^2-ac>0$, négative pour $b^2-ac<0$. Donc, dans le cas de $b^2-ac<0$, les deux valeurs de $-s(a-s)$, et par suite aussi les deux valeurs de d^2u sont de signe contraire, les deux valeurs de s étant de même signe, et, si a, c, k sont de même signe, les deux valeurs de u étant positives, et partant les deux systèmes de valeurs de x et de y étant réels et la quantité $[(a-s)dx+b\,dy]^2$ positive dans les deux cas. Si, au contraire, k était de signe contraire aux deux quantités a, c, alors les deux va-

leurs de u seraient négatives, ainsi que x^2 et y^2, et

$$[(a-s)dx+bdy]^2.$$

Donc, dans ces deux cas, on aura un maximum et un minimum de u, et, dans le cas de u positif, un diamètre réel maximum et un diamètre réel minimum. Dans le cas de b^2-ac positif, les deux valeurs de $s(a-s)$ sont de même signe. De plus, la valeur numérique du radical $\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2-ac}=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+b^2}$ étant plus grande que celle de chacune des quantités $\frac{a+c}{2}$, $\frac{a-c}{2}$, les quantités s et $a-s$ seront de signe contraire, et par suite d^2u de même signe que $[(a-s)dx+bdy]^2$. Or les valeurs de s étant, comme celles de u, l'une positive, l'autre négative, la parenthèse sera positive pour celle des valeurs de s qui répondra à x et y réels, négative pour celle qui répond à x et y imaginaires. Donc u présente, pour la première valeur, un minimum, pour la seconde un maximum (algébrique).

400. Le principe fondamental de notre théorie, exposé au n° 391, suppose essentiellement que la fonction $f(x)$ reçoit des valeurs réelles pour les valeurs $a-h$ et $a+h$ de x, prises de part et d'autre de la valeur a, et nos raisonnements ne pourraient plus s'appliquer au cas où la liaison entre x et y serait telle que, pour l'une des valeurs $a-h$, $a+h$, $f(x)$ devînt imaginaire, c'est-à-dire au cas où le maximum (ou minimum) de $f(x)$ coïnciderait avec un maximum (ou minimum) de x (*fig.* 26), comme cela aurait lieu

Fig. 26

pour l'ordonnée d'une courbe en un point de rebroussement pour lequel la tangente ne serait pas parallèle à l'axe des y.

Si l'on voulait, dans ce cas, appliquer la règle fondée sur la

considération de la dérivée, il faudrait prendre, au lieu de x, une autre variable indépendante t, qui ne présentât ni maximum ni minimum pour la valeur correspondante au maximum ou au minimum de $y = f(x)$. En supposant x et y exprimés au moyen de t, on aurait le maximum ou le minimum de y en égalant à zéro la dérivée

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Mais alors ce ne serait pas le facteur $\frac{dy}{dx}$ qui s'annulerait, mais bien le facteur $\frac{dx}{dt}$, puisque x est maximum ou minimum.

Quelquefois la question a plusieurs solutions, dont les unes répondent à $\frac{dy}{dx} = 0$, les autres à $\frac{dx}{dt} = 0$.

401. *Exemples.* — I. Maximum ou minimum de la distance d'un point donné (a, b) à une courbe donnée. — Il faut trouver le maximum ou le minimum de $u = (a - x)^2 + (b - y)^2$. On a alors généralement

$$\frac{1}{2} du = (x - a)dx + (y - b)dy = 0,$$

d'où

$$\frac{b - y}{a - x} \cdot \frac{dy}{dx} = -1,$$

équation qui exprime que la distance cherchée doit être prise sur une normale à la courbe, menée par le point (a, b).

Si la courbe donnée est un cercle $x^2 + y^2 = R^2$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

d'où

$$\frac{b - y}{a - x} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a};$$

la droite cherchée est donc un diamètre.

Supposons maintenant $b = 0$; le calcul précédent donnera $y = 0$, correspondant à $\frac{dy}{dx} = \infty$. Cependant, si de l'expression

$u = (a - x)^2 + y^2$ on élimine y au moyen de l'équation du cercle, il vient

$$u = a^2 + R^2 - 2ax,$$

et $\frac{du}{dx} = 0$ deviendrait alors $a = 0$, équation impossible. Cela tient à ce que l'on a exprimé u au moyen de la variable x, qui offre un maximum ou minimum simultané de celui de u. Mais, si l'on exprime u et x au moyen de y, qui n'a pas de maximum au point cherché, alors l'équation

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dy} = 0$$

sera satisfaite par $\frac{dx}{dy} = 0$, qui répond à $y = 0$, $x = \pm a$.

II. Maximum ou minimum de la distance du foyer d'une ellipse à sa tangente. — En appelant u le carré de cette distance, r le rayon vecteur mené du foyer au point de contact, on trouve, a, b étant les demi-axes, e l'excentricité,

$$u = \frac{a^2(1 - e^2)r^2}{(2a - r)^2} = \frac{b^2 r^2}{(2a - r)^2} = b^2\left(\frac{2a}{2a - r} - 1\right),$$

expression qui ne peut avoir de maximum ni de minimum, tant que la valeur de r pourra croître ou décroître sans limites. On voit, en effet, que la dérivée

$$\frac{du}{dr} = \frac{2ab^2}{(2a - r)^2}$$

ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de r, ni devenir infinie sans que u devienne aussi infini, et dans ce cas même elle ne présenterait pas le changement de signe nécessaire [391].

Mais, si nous exprimons u et r au moyen de l'angle polaire p, qui n'est pas susceptible de maximum ni de minimum, on a

$$\frac{b^2}{ar} = 1 + e\cos p,$$

et la condition du maximum ou du minimum devient

$$\frac{du}{dp} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dp} = 0,$$

d'où

$$\frac{dr}{dp} = 0, \quad \sin p = 0, \quad p = 0 \text{ ou } \pi;$$

ensuite, pour $\frac{dr}{dp} = 0$,

$$\frac{d^2 u}{dp^2} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{d^2 r}{dp^2}.$$

$\frac{du}{dr}$ étant toujours positif, $\frac{d^2 u}{dp^2}$ sera de même signe que $\frac{d^2 r}{dp^2}$, ou que $e \cos p$; donc u sera maximum pour $p = \pi$, minimum pour $p = 0$.

III. Maximum ou minimum de la somme de deux diamètres conjugués d'une ellipse. — Soient $2s$, $2t$ ces diamètres. On aura

$$s^2 + t^2 = a^2 + b^2, \quad u = s + t = \text{max. ou min.}$$

En éliminant t, il vient

$$u = s + \sqrt{a^2 + b^2 - s^2},$$

$$\frac{du}{ds} = 1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 - s^2}}.$$

On ne peut supposer $\frac{du}{ds}$ infini. En posant donc $\frac{du}{ds} = 0$, il vient

$$s = t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad \frac{d^2 u}{ds^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - s^2}} - \frac{s^2}{(a^2 + b^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}} < 0;$$

donc $s + t$ est un maximum pour $s = t$.

Mais ce résultat n'est pas complet, s ayant lui-même un maximum et un minimum, dont la solution précédente n'a pu tenir compte. Exprimons u au moyen d'une autre variable non susceptible de maximum. Pour cela, posons

$$x = s \cos \varphi, \quad y = s \sin \varphi,$$

$$x_1 = t \cos \varphi_1, \quad y_1 = t \sin \varphi_1,$$

d'où, en vertu de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{1}{s^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}, \quad \frac{1}{t^2} = \frac{\cos^2 \varphi_1}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{b^2},$$

avec la relation $\tang\varphi \tang\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$. On en tire

$$s^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}, \quad t^2 = \frac{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi},$$

$$u = s + t = \frac{ab + \sqrt{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}}.$$

Or $\frac{du}{d\varphi} = 0$ pour $s = t$, et aussi pour $\sin\varphi = 0$ et pour $\cos\varphi = 0$, puisque, en considérant t comme fonction de s, on a

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{s^3}{a^2 b^2}\cdot(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Donc la somme des demi-axes principaux, $u = a + b$, répond à la question, et présente un minimum de u.

§ III.

MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

402. Soit $u = f(x, y, \ldots)$ une fonction des variables indépendantes $x, y, \ldots$, qui doit présenter un maximum (ou minimum) pour $x = a$, $y = b, \ldots$. Il faut pour cela que $f(a + dx, b + dy, \ldots)$ soit $>$ (ou $<$) $f(a, b, \ldots)$, quels que soient les accroissements infiniment petits $dx, dy, \ldots$.

Si l'on représente par $\alpha h, \alpha i, \ldots$ ces accroissements, α étant infiniment petit, et $h, i, \ldots$ étant des quantités quelconques, et que l'on pose [310]

$$f(a + \alpha h, b + \alpha i, \ldots) = F(\alpha),$$

il faudra que $F(\alpha)$ soit maximum (ou minimum) pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$F(\alpha) - F(0) < 0 \text{ ou } > 0,$$

pour toutes les valeurs des rapports des quantités $h, i, \ldots$.

Donc, en général, $F'(\alpha)$ devra changer de signe, lorsque α passera par zéro; $F'(\alpha)$ devient, pour $\alpha = 1$, ce que nous avons désigné symboliquement [339] par du. Donc l'expression

$$hf'(a + \alpha h) + if'(b + \alpha i) + \ldots$$

doit changer de signe avec α, quels que soient les rapports des quantités finies h, i, ... Cela peut arriver lorsque cette quantité devient infinie ou discontinue pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsque quelques-unes des dérivées $f'(x), f'(y)$, ... sont infinies pour $x = a, y = b$, ..., et changent de signe lorsqu'on passe du système de valeurs $a - dx$, $b - dy$, ... au système $a + dx$, $b + dy$, ... Nous laisserons ce cas de côté, pour ne nous occuper que du cas de la continuité.

403. En appliquant les règles établies pour le cas d'une seule variable, on voit qu'il faudra que l'on ait

$$(1) \qquad F'(0) = du = 0, \quad F''(0) = d^2u \left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ pour le maximum,} \\ > 0 \text{ pour le minimum.} \end{array} \right.$$

Le polynôme $du = h\frac{\partial f}{\partial a} + i\frac{\partial f}{\partial b} + \ldots$ devant s'annuler quels que soient h, i, ..., la première condition (1) entraînera les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad \ldots,$$

en désignant par $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \ldots$ ce que deviennent les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$, lorsqu'on y fait $x = a$, $y = b$, ...

La seconde condition exige que le polynôme

$$d^2u = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 2hi\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + i^2\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + \ldots$$

conserve toujours le même signe, quels que soient h, i, ...

Dans le cas de deux variables indépendantes, la condition pour que d^2u ne change pas de signe est, comme on sait,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right)^2 > 0,$$

ce qui implique que $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}$ soient de même signe, et le signe commun de ces deux quantités servira à distinguer le cas du maximum de celui du minimum, suivant qu'il sera négatif ou positif.

Nous verrons plus tard la signification géométrique de ces conditions.

Dans le cas de trois variables indépendantes, posons, pour abréger,

$$d^2u = \alpha h^2 + \alpha' i^2 + \alpha'' k^2 - 2\beta ik - 2\beta' kh - 2\beta'' hi.$$

Par la méthode connue de la décomposition en carrés, on mettra cette quantité sous la forme

$$d^2u = \alpha\left(h - \frac{\beta''}{\alpha} i + \frac{\beta'}{\alpha} k\right)^2 + \left(\alpha' - \frac{\beta''^2}{\alpha}\right)\left(i + \frac{\alpha\beta - \beta'\beta''}{\alpha\alpha' - \beta''^2} k\right)^2$$
$$+ \left(\alpha'' - \frac{\beta'^2}{\alpha} - \frac{\alpha\beta - \beta'\beta''^2}{\alpha\alpha' - \beta''^2}\right) k^2.$$

Les coefficients des trois carrés devant être de même signe pour que d^2u soit de signe constant, leurs produits deux à deux devront être positifs, ce qui donnera d'abord

$$(1) \qquad \alpha\alpha' - \beta''^2 > 0,$$

d'où l'on conclut premièrement que α et α' sont de même signe; ensuite, en faisant le produit des deux derniers coefficients et le multipliant par α^2,

$$(2) \qquad (\alpha''\alpha - \beta'^2)(\alpha\alpha' - \beta''^2) - (\alpha\beta - \beta'\beta'')^2 > 0,$$

ce qui montre que l'on doit avoir aussi, en vertu de (1),

$$\alpha''\alpha - \beta'^2 > 0,$$

et, par suite, que α'' doit être de même signe que α et α'. L'inégalité (2), divisée par la quantité positive $\alpha^2\alpha'\alpha''$, peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{\alpha\alpha'\alpha''}\begin{vmatrix} \alpha & \beta'' & \beta' \\ \beta'' & \alpha' & \beta \\ \beta' & \beta & \alpha'' \end{vmatrix} > 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta''}{\alpha} & \frac{\beta'}{\alpha} \\ \frac{\beta''}{\alpha'} & 1 & \frac{\beta}{\alpha'} \\ \frac{\beta'}{\alpha''} & \frac{\beta}{\alpha''} & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

ou encore sous la forme

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha'\alpha''}\right)\left(1 - \frac{\beta'^2}{\alpha''\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha\alpha}\left(\frac{\beta\beta'}{\alpha''} - \beta''\right)^2 > 0,$$

d'où l'on conclut, en vertu de ce qui précède, que l'on a encore

$$\alpha'\alpha'' - \beta^2 > 0.$$

404. Pour étendre ce qui précède à tous les cas, nous allons établir les conditions générales pour qu'un polynôme homogène du second degré à n variables conserve un signe constant pour toutes les valeurs réelles de ces variables.

Soient d'abord $n = 2$, et

$$(1) \qquad u = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Il faut et il suffit que u ne puisse s'annuler pour aucune valeur du rapport $x_1 : x_2$, c'est-à-dire que l'équation $u = 0$ ne puisse avoir de racine réelle. Il faut donc que l'expression

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(en considérant a_{rs} comme identique à a_{sr}) soit négative, ce qui exige d'abord que a_{11} et a_{22} soient de même signe. Si l'on désigne par $\varepsilon = \pm 1$ ce signe commun, on voit donc que les expressions

$$\varepsilon a_{11} \quad \text{et} \quad \varepsilon \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

doivent être positives.

Soit maintenant $n = 3$, d'où

$$u = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2.$$

La condition pour que $u = 0$ n'ait pas de racine réelle sera que la quantité

$$\begin{aligned}
&(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 - a_{11}(a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3) \\
&\quad = a_{12}^2x_2^2 + a_{13}^2x_3^2 + 2a_{12}a_{13}x_2x_3 - a_{11}(a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3) \\
&\quad = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x_2^2 + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})x_3^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})x_2x_3
\end{aligned}$$

soit négative. En comparant ce polynôme au polynôme (1), et remarquant que le coefficient de x_2^2 est déjà négatif en vertu de la condition précédente, qui doit s'appliquer au cas de $x_3 = 0$, on

voit qu'il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, & a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}, & a_{13}^2 - a_{11}a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Or, si nous considérons le déterminant $|a_{11}\ a_{22}\ a_{33}|$, on peut l'écrire sous les formes successives

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, & a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}, & a_{13}^2 - a_{11}a_{33} \end{vmatrix}.$$

Donc la condition (2) peut se mettre sous la forme

$$a_{11}|a_{11}\ a_{22}\ a_{33}| > 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\varepsilon a_{11}^2 |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}| > 0,$$

ou enfin

$$(3)\qquad \varepsilon^3 |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}| > 0.$$

On voit déjà que, pour que les polynômes homogènes du second degré d'une, de deux, de trois variables soient de signe constant ε, il faut et il suffit que la première, les deux premières ou la totalité des trois conditions

$$\varepsilon a_{11} > 0, \qquad \varepsilon^2 |a_{11}\ a_{22}| > 0, \qquad \varepsilon^3 |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}| > 0$$

soient satisfaites.

On conclut de là, par induction, que la loi qui se manifeste ici doit être générale. C'est ce qu'il est facile de démontrer comme il suit.

Posons

$$\Delta_n = |a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}|,$$

et admettons qu'il soit établi qu'un polynôme homogène du second degré de $n-1$ variables est de signe constant ε quand

toutes les quantités

$$\varepsilon\Delta_1, \quad \varepsilon^2\Delta_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{n-1}\Delta_{n-1}$$

sont positives. Nous allons démontrer que la condition qu'il faut y ajouter pour passer au cas du polynôme de n variables peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon^n\Delta_n > 0.$$

En effet, pour que l'équation

$$\begin{aligned} 0 = u_n &= \sum_1^n a_{rr}x_r^2 + 2\sum_{1,1}^{n,n} a_{rs}x_r x_s \\ &= a_{11}x_1^2 + 2\sum_2^n a_{r1}x_r x_1 + \sum_2^n a_{rr}x_r^2 + 2\sum_{2,2}^{n,n} a_{rs}x_r x_s \end{aligned}$$

n'ait pas de racines réelles, il suffit et il faut que le polynôme

$$\begin{aligned} &\left(\sum_2^n a_{r1}x_r\right)^2 - a_{11}\left(\sum_2^n a_{rr}x_r^2 + 2\sum_{2,2}^{n,n} a_{rs}x_r x_s\right) \\ &= \sum_2^n (a_{r1}^2 - a_{11}a_{rr})x_r^2 + 2\sum_{2,2}^{n,n} (a_{r1}a_{s1} - a_{11}a_{rs})x_r x_s \end{aligned}$$

soit négatif, ce qui fait voir déjà que a_{nn} doit être aussi du signe ε, puisque $a_{n1}^2 - a_{11}a_{nn}$ doit être < 0. En remplaçant donc ici ε par -1 et appliquant la règle reconnue vraie pour les polynômes de $n-1$ variables, on voit que l'on doit avoir l'expression

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{21}a_{21} - a_{11}a_{22} & a_{31}a_{31} - a_{11}a_{32} & \ldots & a_{21}a_{n1} - a_{11}a_{2n} \\ a_{21}a_{31} - a_{11}a_{23} & a_{31}a_{31} - a_{11}a_{33} & \ldots & a_{31}a_{n1} - a_{11}a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{21}a_{n1} - a_{11}a_{2n} & a_{31}a_{n1} - a_{11}a_{3n} & \ldots & a_{n1}a_{n1} - a_{11}a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

ou, en changeant les signes de tous les éléments,

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} & a_{11}a_{32} - a_{13}a_{12} & \ldots & a_{11}a_{n2} - a_{1n}a_{12} \\ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{13} & \ldots & a_{11}a_{n3} - a_{1n}a_{13} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{11}a_{2n} - a_{12}a_{1n} & a_{11}a_{3n} - a_{13}a_{1n} & \ldots & a_{11}a_{nn} - a_{1n}a_{1n} \end{vmatrix} > 0.$$

Or si, dans le déterminant $|a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}|$, on multiplie toutes les lignes horizontales, sauf la première, par a_{11}, puis qu'on retranche de ces lignes les produits de la première par $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, on obtient précisément le déterminant précédent, multiplié par $\frac{1}{a_{11}^{n-1}}$, c'est-à-dire multiplié par une quantité du signe de ε^n. Donc la dernière condition à ajouter sera bien

$$\varepsilon^n \Delta > 0.$$

Remarquons que ces n conditions $\varepsilon^r \Delta_r > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, étant nécessaires et suffisantes, doivent entraîner toutes celles que l'on aurait obtenues en commençant le calcul autrement. Donc tous les déterminants mineurs Δ_r de degré r, relatifs aux éléments de la diagonale, sont du signe de ε^r.

405. Si toutes les dérivées partielles du second ordre s'annulent pour $x = a, y = b, \ldots$, ce qui donne $d^2u = 0$, on verra, comme dans le cas d'une seule variable [393], que, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faudra que d^3u s'annule aussi, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles du troisième ordre de u s'évanouissent pour $x = a, y = b, \ldots$. De plus, il faut que d^4u ait, pour les mêmes valeurs de $x, y, \ldots$, un signe constant, quelles que soient les valeurs des quantités $h, i, \ldots$; et ainsi de suite.

Il peut arriver aussi que d^2u s'annule seulement pour certaines valeurs de $h, i, \ldots$, et qu'il soit de signe constant pour toutes les autres. Supposons, par exemple, dans le cas de deux variables indépendantes, que l'on ait, pour $x = a, y = b$,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

Alors d^2u sera un carré parfait, de la forme $(Ah + Bi)^2$. Pour un rapport des accroissements h, i égal à $-\frac{A}{B}$, on aura $d^2u = 0$; pour toute autre valeur de $\frac{i}{h}$, on aura d^2u de signe constant. On calculera alors d^3u, et l'on y fera $x = a, y = b, \frac{i}{h} = -\frac{A}{B}$; et alors d^3u devra s'annuler, et d^4u avoir le même signe qu'a d^2u pour toute autre valeur de $\frac{i}{h}$.

Dans le cas de deux variables, lorsqu'on sera obligé de prendre en considération les quantités $d^5 u$, $d^6 u$, ..., on n'aura qu'à s'assurer, au moyen du théorème de Sturm, que les équations $d^5 u = 0$, $d^6 u = 0$, ..., où l'on prend $\frac{i}{h}$ pour inconnue, n'ont pas de racines réelles.

406. Soit proposé maintenant de déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction implicite u, définie par l'équation

$$(1) \qquad F(u, x, y, \ldots) = 0.$$

La condition $du = 0$ donne d'abord [403], en égalant à zéro les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., ou, ce qui revient au même, en remarquant que l'équation $dF = 0$ doit, pour $du = 0$, être vérifiée pour des valeurs quelconques de dx, dy, ...,

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \ldots.$$

Il faut ensuite exprimer que $d^2 u$ ne change pas de signe. Or cette quantité est donnée par l'équation $d^2 F = 0$, qui, par la suppression des termes contenant le facteur nul du, se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \ldots = 0.$$

Il reste donc à trouver les conditions pour que l'expression

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \ldots$$

ne change pas de signe, quelles que soient les valeurs de dx, dy, ... On voit, d'après cela, que les conditions qui doivent être satisfaites pour que la fonction u soit un maximum ou un minimum sont de même forme que celles qui exprimeraient que la fonction explicite $F(u, x, y, \ldots)$ serait un maximum ou un minimum, en y considérant u comme une constante.

407. Supposons actuellement que, au lieu d'être des variables indépendantes, les $n + k$ variables $x, y, \ldots$ soient liées par les

k équations de condition

$$(1) \qquad \varphi(x, y, \ldots) = 0, \quad \chi(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots,$$

et qu'il s'agisse de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction donnée

$$(2) \qquad u = f(x, y, \ldots)$$

de ces variables. On différentiera d'abord ces $k+1$ équations, en supposant $du = 0$, et, entre les $k+1$ équations résultantes, on pourra éliminer les k différentielles des k variables déterminées par les équations (1) en fonction des n autres, considérées comme indépendantes. Il restera alors une équation entre les variables x, y, ... et les n différentielles des variables indépendantes. En égalant à zéro [403] les coefficients de ces n différentielles, on aura n équations qui, jointes aux k équations (1), détermineront les systèmes de valeurs de x, y, ... qui pourront correspondre à un maximum ou à un minimum de la fonction u.

On différentiera ensuite une seconde fois les équations (1) et (2), et l'on éliminera, entre les $k+1$ équations $d^2\varphi = 0$, $d^2\chi = 0$, ..., $d^2u = d^2f$, les k différentielles secondes de celles des variables x, y, ... qui sont considérées comme dépendantes des n autres en vertu des équations (1). On aura alors pour d^2u une expression qui ne contiendra plus que les différentielles des n variables indépendantes, et l'on établira, comme ci-dessus, les conditions pour que d^2u conserve toujours le même signe, quelles que soient ces différentielles.

408. On peut encore traiter la même question par la méthode des multiplicateurs [398]. Multiplions les différentielles des équations de condition (1),

$$d\varphi = 0, \quad d\chi = 0, \quad \ldots,$$

par des indéterminées λ, μ, ..., et ajoutons-les à l'équation $df = 0$, ce qui donnera l'équation

$$df + \lambda d\varphi + \mu d\chi + \ldots = 0.$$

On pourra maintenant disposer des indéterminées λ, μ, ... de manière à faire disparaître les coefficients des k différentielles des

variables non indépendantes. Il ne restera plus alors dans l'équation que les différentielles des n variables indépendantes, dont on devra aussi [403] annuler les coefficients. On obtiendra de cette manière les $n+k$ équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui, jointes aux $k+1$ équations (1) et (2), détermineront les $n+2k+1$ quantités $u, x, y, \ldots, \lambda, \mu, \ldots$.

Ce calcul revient à considérer le maximum ou le minimum *absolu* de la fonction $v = f + \lambda\varphi + \mu\chi + \ldots$, en laissant d'abord indéterminées les constantes $\lambda, \mu, \ldots$, et regardant toutes les $n+k$ variables $x, y, \ldots$ comme indépendantes. On obtient de cette manière des valeurs de ces variables qui dépendent de $\lambda, \mu, \ldots$. Si l'on détermine maintenant ces dernières quantités de manière que les fonctions $\varphi, \chi, \ldots$ s'évanouissent, la valeur de v se réduira à celle de u, et le maximum de v deviendra le maximum de u.

Il faut ensuite exprimer les conditions pour que $d^2 v$ soit de signe constant. Or, en différentiant l'expression

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \ldots$$

et ayant égard aux conditions

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \ldots$$

les différentielles secondes $d^2 x$, $d^2 y$, ... disparaîtront, et il ne restera plus, pour $d^2 v$, que le polynôme du second degré

$$d^2 v = (dx\,\mathrm{D}_x + dy\,\mathrm{D}_y + \ldots)^2,$$

qui devra être de signe constant. On éliminera k des différentielles $dx, dy, \ldots$ au moyen des équations

$$d\varphi = 0, \quad d\chi = 0, \quad \ldots,$$

et l'on exprimera les conditions pour que $d^2 v$ soit de signe constant pour toutes les valeurs des différentielles restantes.

409. Lorsqu'il n'y a qu'une seule équation de condition $\varphi = 0$, l'élimination de λ entre les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \ldots$$

se fait immédiatement, et l'on en tire les n équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \ldots = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \ldots$$

qui, jointes à $\varphi = 0$, détermineront les $n-1$ inconnues $x, y, \ldots$.

410. *Exemples.* — 1. Maximum ou minimum de la fonction

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

En égalant les deux dérivées partielles à zéro, on a les conditions

$$(1) \qquad ax + by + d = 0, \quad bx + cy + e = 0.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{2} d^2 u = a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2$$
$$= a\left[\left(dx + \frac{b}{a} dy\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}\,dy^2\right].$$

Il y a donc maximum ou minimum pour $ac - b^2 > 0$. Au contraire, si l'on a $ac - b^2 < 0$, il n'y a ni maximum ni minimum.

Si le coefficient de l'un des carrés, a par exemple, est nul, alors

$$\frac{1}{2} d^2 u = dy(2b\,dx + c\,dy),$$

quantité qui change de signe avec dx, si l'on prend $\frac{dy}{dx}$ assez petit.

Lorsque $ac - b^2 = 0$, les équations (1) sont généralement incompatibles. Elles ne cesseront de l'être que si l'on a $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{e}{d}$. En éliminant alors c et e, il vient

$$u = a\left(x + \frac{b}{a} y + \frac{d}{a}\right)^2 + \frac{af - d^2}{a},$$

quantité qui est évidemment maximum ou minimum pour

$$ax + by + d = 0.$$

On a donc, dans ce cas, une *ligne* de maximum ou de minimum, au lieu d'un *point*.

Si l'on a encore, de plus, $b = 0$, alors $ae = cd = ac = 0$, ce qui peut donner lieu à trois cas :

1° $a = 0, \quad c = 0, \quad u = 2dx + 2ey + f;$

2° $a = 0, \quad d = 0, \quad u = cy^2 + 2ey + f;$

3° $c = 0, \quad e = 0, \quad u = ax^2 + 2dx + f.$

Le premier cas ne comporte ni maximum ni minimum. Dans les deux autres, on est ramené à la recherche du maximum ou du minimum d'une fonction d'une seule variable.

- II. Trouver la plus courte distance de deux droites

$$(1) \qquad \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C},$$

$$(2) \qquad \frac{x'-a'}{A'} = \frac{y'-b'}{B'} = \frac{z'-c'}{C'}.$$

En désignant par r la valeur commune des rapports (1), et par r' celle des rapports (2), et mettant pour $x, y, z, x', \ldots$ leurs valeurs en r et r', le carré de la distance de deux points pris respectivement sur ces droites aura pour expression

$$u = (Ar' - Ar + a' - a)^2 + (Br' - Br + b' - b)^2 + (Cr' - Cr + c' - c)^2.$$

En différentiant par rapport aux deux variables indépendantes r, r', il vient

$$A(Ar' - Ar + a' - a) + B(Br' - Br + b' - b) + C(Cr' - Cr + c' - c) = 0,$$
$$A'(Ar' - Ar + a' - a) + B'(Br' - Br + b' - b) + C'(Cr' - Cr + c' - c) = 0,$$

équations qui déterminent r et r'. On peut écrire ces équations sous la forme

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$
$$A'(x' - x) + B'(y' - y) + C'(z' - z) = 0,$$

et l'on voit qu'elles expriment que la droite qui joint les points

x, y, z, x', y', z' est perpendiculaire à chacune des droites 1 et 2.

On a ensuite

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} = A + B + C = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dy^2} = A' + B' + C' = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx\,dy} = AA' + BB' + CC',$$

d'où

$$\frac{1}{4}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right] = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2 > 0;$$

donc la valeur trouvée pour u est bien un minimum.

III. Maximum ou minimum de la fonction

$$u = x^l y^m \ldots$$

les variables $x, y, \ldots$ étant assujetties à la condition

$$x + y + \ldots = a.$$

En différentiant ces deux équations, il vient

$$0 = \frac{du}{u} = \frac{l}{x}dx + \frac{m}{y}dy + \ldots, \quad 0 = dx + dy + \ldots,$$

d'où l'on conclut, par la règle du n° 409,

$$\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \ldots = \frac{l + m + \ldots}{a},$$

ce qui détermine les valeurs de $x, y, \ldots$ auxquelles peut correspondre un maximum ou un minimum de u. On a ensuite, en différentiant une seconde fois et faisant ensuite $du = 0$,

$$\frac{d^2u}{u} = \left(\frac{l}{x^2}dx^2 + \frac{m}{y^2}dy^2 + \ldots\right) + \left(\frac{l}{x}d^2x + \frac{m}{y}d^2y + \ldots\right),$$

$$0 = d^2x + d^2y + \ldots.$$

or, à cause de $\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \ldots = \frac{l + m + \ldots}{a}$, on a

$$\frac{l}{x}d^2x + \frac{m}{y}d^2y + \ldots = \frac{l}{x}(d^2x + d^2y + \ldots) = 0.$$

et la valeur de la quantité $\frac{d^2 u}{u}$ se réduit à

$$\left(\frac{l}{x^2}\,dx^2 + \frac{m}{y^2}\,dy^2 + \ldots\right),$$

quantité de signe constant, si les exposants l, m, ... sont tous de même signe. Dans ce cas, en supposant a positif, on a un maximum ou un minimum, suivant que les exposants seront tous positifs ou tous négatifs.

IV. Trouver le maximum ou le minimum d'un demi-diamètre d'une surface du second degré

$$(1)\qquad f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2by z + 2b'zx + 2b''xy = h.$$

On cherchera le maximum ou le minimum de

$$(2)\qquad u = x^2 + y^2 + z^2.$$

En différentiant les équations (1) et (2), faisant $du = 0$, et écrivant, d'après la règle du n° 409, la proportionnalité des dérivées partielles, il vient

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(y)}{y} = \frac{f'(z)}{z} = 2s,$$

s étant une inconnue auxiliaire. En développant, ces équations deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} (a - s)x + b''y + b'z = 0, \\ b''x + (a' - s)y + bz = 0, \\ b'x + by + (a'' - s)z = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en éliminant x, y, z,

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a - s & b'' & b' \\ b'' & a' - s & b \\ b' & b & a'' - s \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui donne pour s trois valeurs, dont on démontre la réalité. On a ensuite

$$\begin{aligned} x : y : z &= [(a' - s)(a'' - s) - b^2] : [bb' - b''(a'' - s)] : [b''b - b'(a' - s)] \\ &= [bb' - b''(a'' - s)] : [(a'' - s)(a - s) - b'^2] : [b'b'' - b(a - s)] \\ &= [b''b - b'(a' - s)] : [b'b'' - b(a - s)] : [(a - s)(a' - s) - b''^2]. \end{aligned}$$

En multipliant les équations (3) respectivement par x, y, z, et ajoutant, il vient

$$f(x, y, z) = s(x^2 + y^2 + z^2) = su = h,$$

ce qui donne pour u trois valeurs correspondantes aux trois valeurs de s.

Pour distinguer maintenant le maximum du minimum, différentions une seconde fois les équations (1) et (2). Il vient, en vertu des équations (3),

$$\begin{aligned}
s\,du &= \frac{1}{2}\,d^2f = \frac{1}{2}\,(df'(x)\,dx + df'(y)\,dy + df'(z)\,dz)\\
&= \frac{1}{2}\,(f'(x)\,d^2x + f'(y)\,d^2y + f'(z)\,d^2z)\\
&\quad + a\,dx + b''dy + b'dz\,dx + (b''dx + a'dy + b'dz)\,dy + (b'dx + b\,dy + a''dz)\,dz,\\
&= f(dx, dy, dz) + x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z,\\
\frac{1}{2}\,d^2u &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z,
\end{aligned}$$

d'où, en éliminant entre ces deux équations la quantité

$$x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z,$$

$$\frac{1}{2}\,d^2u = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{1}{s}\,f(dx, dy, dz),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,s\,d^2u = {} & (a - s)\,dx^2 + (a' - s)\,dy^2 + (a'' - s)\,dz^2\\
& + 2b\,dy\,dz + 2b'dz\,dx + 2b''dx\,dy.
\end{aligned}$$

Une première condition pour que d^2u ne puisse changer de signe, c'est [403] que les trois différences $a - s$, $a' - s$, $a'' - s$ soient de même signe, et l'on sera dans le cas du maximum ou du minimum, suivant que les trois quantités $\frac{a}{s} - 1$, $\frac{a'}{s} - 1$, $\frac{a''}{s} - 1$ seront positives ou négatives.

Il faut, de plus, que, en décomposant la valeur de d^2u en carrés, les coefficients des trois carrés soient de même signe. Parmi les conditions trouvées au n° 403, la condition (3) demande que la

quantité

$$\frac{1}{(a'-s)(a''-s)(a-s)}\begin{vmatrix} a-s & b'' & b' \\ b'' & a'-s & b \\ b' & b & a''-s \end{vmatrix}$$

soit positive, ou du moins ne soit pas négative. Mais, d'après l'équation (4) du présent numéro, cette quantité est nulle. Les conditions se réduisent donc aux trois suivantes :

$$(a'-s)(a''-s)-b^2 \geqq 0,$$
$$(a''-s)(a-s)-b'^2 \geqq 0,$$
$$(a-s)(a'-s)-b''^2 \geqq 0,$$

l'une quelconque de ces trois conditions étant la suite des deux autres et de l'équation (4). Or, si l'on désigne par σ_1, σ_2 les racines de l'équation

$$(a'-\sigma)(a''-\sigma)-b^2=0,$$

on sait que les racines s_1, s_2, s_3 de l'équation (4) satisfont aux inégalités

$$-\infty < s_1 \leqq \sigma_1 \leqq s_2 \leqq \sigma_2 \leqq s_3 < +\infty.$$

et, comme on doit avoir

$$(a'-s)(a''-s)-b^2=(s-\sigma_1)(s-\sigma_2) \geqq 0,$$

on en conclut que la plus petite et la plus grande racine, s_1 et s_3, donnent seules un maximum ou un minimum, tandis que la racine moyenne s_2 ne correspond ni à un maximum ni à un minimum.

On devra faire ici, sur les signes des carrés, la même remarque que nous avons faite à la fin de l'exemple VI du n° 399.

§ IV.

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

411. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux polynômes premiers entre eux, et considérons la fraction algébrique irréductible

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Si le degré du numérateur n'était pas inférieur à celui du dénominateur, on pourrait, par la division, décomposer la fraction en une partie entière, plus une autre fraction de même dénominateur $\varphi(x)$, dans laquelle le degré du numérateur serait moindre que celui du numérateur. Nous pourrons donc toujours supposer ici le degré de $f(x)$ moindre que celui de $\varphi(x)$.

Concevons maintenant le polynôme $\varphi(x)$ décomposé en facteurs simples, correspondants aux diverses racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Il pourra se présenter plusieurs cas, que nous allons considérer successivement.

412. Soit a une racine simple de l'équation $\varphi(x) = 0$. On pourra poser

$$\varphi(x) = (x - a)\chi(x),$$

$\chi(x)$ n'étant pas divisible par $x - a$. Je dis maintenant que l'on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sous la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{f_1(x)}{\chi(x)},$$

A étant une constante qui n'est ni nulle ni infinie, et $f_1(x)$ étant un polynôme différent de zéro, premier avec $\chi(x)$, et de degré moindre que $\chi(x)$, si $f(x)$ est de degré moindre que $\varphi(x)$.

En effet, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A\chi(x)}{(x - a)\chi(a)} + \frac{(x - a)f_1(x)}{(x - a)\chi(a)}.$$

Les dénominateurs des deux membres étant identiques, il faut que les numérateurs le soient et que l'on ait

$$1 \qquad f(x) - A\chi(a) = (x - a)f_1(x),$$

d'où l'on tire

$$2 \qquad f_1(x) = \frac{f(x) - A\chi(a)}{x - a}.$$

Pour que le second membre soit entier, il faut et il suffit que

le numérateur s'annule pour $x = a$, ce qui donne

$$A = \frac{f(a)}{\chi(a)},$$

ou, en remarquant que [378] $\chi(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = \varphi'(a)$,

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)},$$

valeur qui n'est pas nulle, puisque $f(x)$ n'est pas divisible par $x - a$, et qui n'est pas infinie, puisque $x - a$ ne divise ni $\chi(x)$ ni $\varphi'(x)$.

De plus, l'identité (1) montre que : 1° $f_1(x)$ n'est pas nul, sans quoi $f(x)$ serait divisible par $\chi(x)$, et ne serait pas premier avec $\varphi(x)$; 2° $f_1(x)$ et $\chi(x)$ sont premiers entre eux, sans quoi leur diviseur commun diviserait à la fois $f(x)$ et $\chi(x)$, et par suite aussi $\varphi(x)$; 3° si le degré de $f(x)$ est moindre que le degré m de $\varphi(x)$, le degré de $f(x) - A\chi(x)$ sera tout au plus égal à $m - 1$; donc, en vertu de l'identité (2), le degré de $f_1(x)$ sera tout au plus $m - 2$, et par suite sera moindre que le degré $m - 1$ de $\chi(x)$.

413. Soit b une deuxième racine simple de $\varphi(x) = 0$, laquelle sera racine simple de $\chi(x) = 0$; on verra de même que, en posant $\chi(x) = (x - b)\psi(x)$, on pourra toujours, et d'une seule manière, déterminer B de façon à avoir identiquement

$$\frac{f_1(x)}{\chi(x)} = \frac{B}{x-b} + \frac{f_2(x)}{\psi(x)},$$

B n'étant ni nul ni infini, et le polynôme $f_2(x)$ étant différent de zéro, premier avec $\psi(x)$, et de degré inférieur à $\psi(x)$.

En continuant ainsi, on arrivera, si $\varphi(x) = 0$ n'a que des racines simples, à une fraction dont le dénominateur sera le dernier facteur simple, et dont le numérateur, de degré < 1, sera par suite constant, en même temps que différent de zéro. Alors, a, b, ..., h étant les diverses racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, la fonction proposée sera décomposée en une somme de *fractions simples*, de la forme

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{H}{x-h},$$

dont les numérateurs sont des constantes finies et différentes de zéro.

414. Au lieu d'opérer par divisions successives pour obtenir les numérateurs A, B, ... au moyen des quotients $\chi(x)$, $\psi(x)$, ..., on peut les déterminer tous directement au moyen de $f(x)$ et de $\varphi'(x)$, comme on a fait pour le premier A. En effet, $\frac{A}{x-a}$ et $\frac{B}{x-b}$ étant deux termes quelconques du second membre de (3), on peut mettre la formule (3) sous l'une ou l'autre des formes

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{B}{x-b} + \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},$$

les numérateurs $f_1(x)$, $f_2(x)$ étant différents de zéro, premiers avec leurs dénominateurs respectifs, et de degré inférieur à ces dénominateurs. Or nous avons démontré [**412**] que chacune de ces décompositions n'est possible que d'une seule manière, et pour les valeurs

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{\varphi'(b)}$$

des constantes A et B. Donc les numérateurs du second membre de la formule (3) sont les mêmes que l'on aurait obtenus directement en remplaçant, dans le rapport $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$, x par la racine correspondante de l'équation $\varphi(x) = 0$.

415. Si l'on donnait une fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, dans laquelle le degré du numérateur fût égal ou supérieur à celui du dénominateur, on devrait avoir recours à la division pour déterminer la partie entière qu'il faudrait ajouter à la somme des fractions simples. Mais, dans la détermination des numérateurs de ces fractions, on peut, au lieu du reste de la division, introduire le dividende $F(x)$ lui-même, ce qui peut être plus simple dans certains cas. En effet, si l'on pose

$$F(x) = Q\varphi(x) + f(x),$$

on a, pour $x = a$, $\varphi(a) = 0$ et $F(a) = f(a)$. Donc le numérateur

de la fraction simple de dénominateur $x - a$ sera

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)} = \frac{F(a)}{\varphi'(a)}.$$

416. Puisque nous connaissons maintenant la forme (3) sous laquelle on peut décomposer $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, on pourra employer pour le calcul des constantes A, B, ... la méthode des coefficients indéterminés. Pour cela, on réduira au même dénominateur le second membre de la formule (3). Si N est le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\varphi(x)$, le dénominateur du second membre sera identique à $\frac{1}{N}\varphi(x)$; donc le numérateur devra être identique à $\frac{1}{N}f(x)$. Or ce numérateur est un polynôme de degré $m-1$, m étant le degré de $\varphi(x)$, et par suite il aura m coefficients, fonctions du premier degré des indéterminées A, B, ... Donc l'identification de ce polynôme avec $\frac{1}{N}f(x)$ donnera m équations du premier degré, qui fourniront les valeurs des m inconnues A, B, ...

Si $f(x)$ était de degré égal ou supérieur à $\varphi(x)$, on pourrait encore suivre la même marche, en ayant soin d'ajouter au second membre de (3) un polynôme à coefficients indéterminés, dont le degré fût égal à la différence des degrés du numérateur et du dénominateur.

417. II. Si une racine $a = \alpha + \beta i$ de l'équation $\varphi(x) = 0$ est complexe, cette équation admettra aussi la racine conjuguée $b = \alpha - \beta i$, et les numérateurs correspondants à ces racines,

$$A = \frac{f(\alpha + \beta i)}{\varphi'(\alpha + \beta i)}, \quad B = \frac{f(\alpha - \beta i)}{\varphi'(\alpha - \beta i)},$$

seront aussi deux quantités complexes conjuguées. L'ensemble des deux fractions simples $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$ prendra la forme réelle

$$\frac{M + Ni}{x - \alpha - \beta i} + \frac{M - Ni}{x - \alpha + \beta i} = \frac{2M(x-\alpha) - 2N\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Donc, si $x^2 + px + q$ est un facteur réel du second degré de $\varphi(x)$, ce facteur donnera lieu à une fraction de la forme réelle

$$\frac{Px + Q}{x^2 + px + q},$$

qui remplacera les deux fractions à termes complexes $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, résultant de la décomposition de ce facteur du second degré, et dans cette fraction les deux coefficients P, Q seront finis, et ne pourront être nuls tous les deux à la fois.

On pourra obtenir immédiatement ces deux coefficients P, Q par la méthode des coefficients indéterminés.

418. On peut établir directement cette proposition, en lui donnant même une forme plus générale.

Soit $\varpi(x)$ un diviseur de $\varphi(x)$, de degré k, ne renfermant que des facteurs simples, et premier avec le quotient

$$\frac{\varphi(x)}{\varpi(x)} = \chi(x).$$

La fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ pourra être décomposée, toujours et d'une seule manière, sous la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{\chi(x)\varpi(x)} = \frac{\theta(x)}{\varpi(x)} + \frac{f_1(x)}{\chi(x)},$$

$\theta(x)$ étant un polynôme différent de zéro et de degré moindre que $\varpi(x)$, et $f_1(x)$ un polynôme différent de zéro, premier avec $\chi(x)$, et de degré moindre que $\chi(x)$, si $f(x)$ est de degré moindre que $\varphi(x)$.

Pour cela, il faut que l'on puisse déterminer $\theta(x)$ de manière que l'on ait identiquement

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{\theta(x)}{\varpi(x)} = \frac{f_1(x)}{\chi(x)},$$

et il suffit que le numérateur de la fraction $\frac{f(x) - \theta(x)\chi(x)}{\varpi(x)\chi(x)}$ soit divisible par $\varpi(x)$, et que l'on ait

$$1) \qquad f(x) - \theta(x)\chi(x) = \varpi(x) f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme entier.

La condition pour que le polynôme $f(x) - \theta(x)\chi(x)$ soit divisible par $\varpi(x)$, c'est qu'il s'annule lorsqu'on fait x égal à l'une quelconque des racines $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de l'équation $\varpi(x) = 0$. Si donc on représente par

$$\theta(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{k-1} x^{k-1}$$

le numérateur cherché de $\varpi(x)$, les coefficients de ce polynôme devront satisfaire aux k équations

$$\begin{aligned}
A_0 + A_1 a_1 + \ldots + A_{k-1} a_1^{k-1} &= \frac{f(a_1)}{\chi(a_1)},\\
A_0 + A_1 a_2 + \ldots + A_{k-1} a_2^{k-1} &= \frac{f(a_2)}{\chi(a_2)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_0 + A_1 a_k + \ldots + A_{k-1} a_k^{k-1} &= \frac{f(a_k)}{\chi(a_k)}.
\end{aligned}$$

Or, le déterminant de ces équations [130]

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_k & \ldots & a_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_k - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})$$

n'étant pas nul, puisque l'on a supposé toutes les racines de $\varpi(x) = 0$ inégales entre elles, on voit que la détermination des coefficients A pourra toujours se faire, et d'une seule manière.

Ces coefficients ne seront pas tous nuls, puisque les seconds membres des équations qui les donnent ne sont pas nuls. Donc $\theta(x)$ est déterminé, différent de zéro et de degré moindre que $\varpi(x)$.

De plus, l'égalité (1) montre : 1° que $f_1(x)$ n'est pas nul, sans quoi $f(x)$ ne serait pas premier avec $\chi(x)$; 2° que $f_1(x)$ est premier avec $\chi(x)$, pour la même raison; 3° que $f_1(x)$ est de degré moindre que $\chi(x)$; car $f(x)$ et $\theta(x)\chi(x)$ sont l'un et l'autre de degré moindre que $\varphi(x) = \varpi(x)\chi(x)$; donc le quotient de $f(x) - \theta(x)\chi(x)$ par $\varpi(x)$ sera de degré moindre que le quotient de $\varphi(x)$ par $\varpi(x)$, ou que $\chi(x)$.

419. III. Supposons maintenant que le dénominateur $\varphi(x)$ ait

un facteur multiple $(x-a)^n$, et soit

$$[illegible] = \chi(x) \; [illegible],$$

$\chi(x)$ étant une fonction entière, non divisible par $x-a$. Considérons la fraction

$$\frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

qui se trouve dans le cas examiné au n° 412, si ce n'est que le degré du numérateur n'est plus nécessairement inférieur à celui du dénominateur. On démontrera, comme au n° 412, que cette fraction peut, et d'une seule manière, se décomposer sous la forme

$$[illegible] + \frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

A étant fini et différent de zéro, et $f_1(x)$ étant différent de zéro, premier avec $\chi(x)$, et de degré moindre que le plus élevé des degrés de $f(x)$ et de $\chi(x)$. Donc la fraction

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{(x-a)^n \chi(x)}.$$

pourra toujours, et d'une seule manière, être décomposée sous la forme

$$[illegible] + \frac{A}{[illegible]} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}\chi(x)}.$$

A n'étant ni nul ni infini, $f_1(x)$ étant différent de zéro et premier avec $\chi(x)$, et le degré de $f_1(x)$ étant moindre que celui de $(x-a)^{n-1}\chi(x)$, lequel est au moins égal à celui de $f(x)$.

On verra de même que l'on peut satisfaire, toujours et d'une seule manière, à l'identité

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}\chi(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{n-2}\chi(x)}.$$

les mêmes propriétés subsistant, si ce n'est que A_1 peut être nul.

En continuant ainsi, on verra que l'on peut toujours, et d'une

seule manière, mettre la fraction proposée sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-a)^n\chi(x)} &= \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots \\ &\quad + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_n(x)}{\chi(x)}, \end{aligned}\right.$$

les coefficients $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ étant tous finis, le premier A n'étant pas nul, et $f_n(x)$ étant un polynôme différent de zéro, premier avec $\chi(x)$, et de degré inférieur à $\chi(x)$.

Si $\chi(x)$ contient lui-même un autre facteur multiple $(x-b)^p$, on décomposera pareillement $\frac{f_n(x)}{\chi(x)} = \frac{f_n(x)}{(x-b)^p\psi(x)}$ en une somme de la forme

$$\frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{f_{n+p}(x)}{\psi(x)},$$

$f_{n+p}(x)$ étant différent de zéro, premier avec $\psi(x)$ et de degré inférieur à $\psi(x)$, et ainsi de suite; de sorte que finalement $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sera décomposé en une somme de fractions simples dont les numérateurs seront constants, et dont les dénominateurs seront les diverses puissances des facteurs simples qui divisent $\varphi(x)$, et les numérateurs des plus élevées parmi ces puissances n'étant pas nuls. De plus, on verrait, comme au n° 414, que cette décomposition ne pourra se faire que d'une seule manière.

On pourra donc employer [416], pour le calcul des coefficients $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$, etc., la méthode des coefficients indéterminés.

420. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul direct des coefficients $A, A_1, \ldots$; par exemple, la formule (1) du numéro précédent montre que l'on doit avoir identiquement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{\chi(x)} &= \frac{(x-a)^n f(x)}{\varphi(x)} \\ &= A + A_1(x-a) + \ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + (x-a)^n\frac{f_n(x)}{\chi(x)}. \end{aligned}\right.$$

Les deux fonctions $\frac{f(x)}{\chi(x)}$ et $\frac{f_n(x)}{\chi(x)}$ restent finies, ainsi que toutes

leurs dérivées, pour $x = a$; de plus, la fonction $(x-a)^n \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ s'évanouit, avec ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = a$. Si donc on pose, pour abréger, $(x-a)^n \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Pi(x)$, et qu'après avoir différentié $n-1$ fois l'équation (1) et y fasse $x = a$, il viendra

$$A = \Pi(a), \quad A_1 = \frac{\Pi'(a)}{1}, \quad \ldots, \quad A_{n-1} = \frac{\Pi^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)},$$

c'est-à-dire, en désignant par ε un infiniment petit,

$$A = \lim \frac{f(a+\varepsilon)}{\varphi(a+\varepsilon)},$$

$$A_1 = \frac{1}{1} \lim D \left[\varepsilon \frac{f(a+\varepsilon)}{\varphi(a+\varepsilon)} \right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \lim D^{n-1} \left[\varepsilon \frac{f(a+\varepsilon)}{\varphi(a+\varepsilon)} \right].$$

421. On peut encore former simplement des équations qui déterminent $A, \ldots, A_{n-1}$ au moyen des valeurs des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ et de leurs dérivées, pour $x = a$. En effet, si, F désignant une fonction quelconque, on fait, pour abréger,

$$\frac{F^{(k)}(a)}{1.2\ldots k} = F_k,$$

on aura, en développant $f(x)$ et $\varphi(x)$ suivant les puissances de $x-a$, et remarquant que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont nuls

$$f(x) = f_0 + (x-a) f_1 + \ldots + (x-a)^k f_k + \ldots + (x-a)^n f_n + \ldots,$$
$$\varphi(x) = (x-a)^n \varphi_n + (x-a)^{n+1} \varphi_{n+1} + \ldots + (x-a)^k \varphi_k + \ldots$$

Substituant ces valeurs dans l'identité

$$f(x) = \frac{A\varphi(x)}{(x-a)^n} + \frac{A_1\varphi(x)}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}\varphi(x)}{(x-a)} + (x-a)^n f_n(x),$$

et égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances

de $x - a$, il vient

$$\begin{aligned}
f &= A\varphi_n, \\
f_1 &= A\varphi_{n-1} + A_1\varphi_n, \\
f_2 &= A\varphi_{n-2} + A_1\varphi_{n-1} + A_2\varphi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_{n-1} &= A\varphi_1 + A_1\varphi_2 + \ldots + A_{n-1}\varphi_n.
\end{aligned}$$

Ces équations déterminent successivement les valeurs des quantités $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$, sans introduire en diviseurs d'autres quantités que les puissances de la quantité φ_n, laquelle n'est pas nulle. Donc les valeurs de tous ces coefficients sont finies, et, de plus, celle du premier A n'est pas nulle.

422. IV. Supposons enfin que $\varphi(x)$ ait un facteur multiple du second degré à racines complexes, $(x^2 + px + q)^n$, et posons

$$\varphi(x) = (x^2 + px + q)^n \chi(x).$$

Nous avons vu [417] que l'on peut toujours, et d'une seule manière, déterminer les coefficients P, Q, dont l'un au moins n'est pas nul, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{f(x)}{(x^2 + px + q)\chi(x)} = \frac{Px + Q}{x^2 + px + q} + \frac{f_1(x)}{\chi(x)},$$

$f_1(x)$ étant différent de zéro, premier avec $\chi(x)$, et de degré inférieur à celui de $(x^2 + px + q)^{n-1}\chi(x)$. On pourra donc toujours, et d'une seule manière, déterminer P et Q, de telle sorte que l'on ait, l'un au moins des coefficients P, Q étant $\gtrless 0$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}\chi(x)}.$$

On trouvera de la même façon, P_1 et Q_1 étant finis et pouvant s'annuler tous les deux, $f_2(x)$ étant premier avec $\chi(x)$, différent de zéro et de degré inférieur à $(x^2 + px + q)^{n-2}\chi(x)$,

$$\frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}\chi(x)} = \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{f_2(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2}\chi(x)},$$

et ainsi de suite; en sorte que la fraction proposée pourra être

décomposée sous la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P}{[\chi(x)]^n} + \frac{P_1}{[\chi(x)]^{n-1}} + \frac{Q_1}{\chi(x)} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{[\chi(x)]^2} + \frac{Q_{n-1}}{\chi(x)} + \frac{f_n(x)}{\varphi(x)},$$

tous les coefficients P, Q, P_1, Q_1, ..., P_{n-1}, Q_{n-1} étant finis, l'un au moins des deux premiers n'étant pas nul, et $f_n(x)$ étant une fonction différente de zéro, première avec $\chi(x)$, et de degré inférieur à $\chi(x)$; et cette décomposition pourra avoir lieu toujours et d'une seule manière.

Dans la pratique, on emploiera généralement, pour le calcul des quantités P, Q, ..., la méthode des coefficients indéterminés, dont on pourra souvent faciliter l'application, en attribuant à x des valeurs particulières, par exemple, en égalant x tour à tour aux diverses racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, ce qui fera disparaître une partie des termes de l'identité [416].

423. On peut généraliser cette décomposition, comme on l'a fait pour la décomposition correspondante aux facteurs simples. Soit $\varphi(x) = [\varpi(x)]^n \chi(x)$, $\varpi(x)$ étant, comme au n° 418, une fonction n'admettant que des facteurs inégaux du premier degré, et première avec $\chi(x)$. Si l'on désigne par $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, ..., $\theta_{n-1}(x)$ des polynômes de degré inférieur à $\varpi(x)$ et dont le premier au moins n'est pas nul, la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ pourra toujours, et d'une seule manière, se décomposer sous la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\theta(x)}{[\varpi(x)]^n} + \frac{\theta_1(x)}{[\varpi(x)]^{n-1}} + \ldots + \frac{\theta_{n-1}(x)}{\varpi(x)} + \frac{f_n(x)}{\varphi(x)},$$

la fonction $f_n(x)$ jouissant des mêmes propriétés que tout à l'heure.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES FONCTIONS EXPLICITES.

§ I.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

424. D'après ce que nous venons de voir, toute fonction rationnelle peut se décomposer en un polynôme entier, plus une somme de fractions de l'une des quatre formes

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Px+Q}{x^2-px+q},\quad \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}.$$

Donc, pour intégrer une fonction rationnelle, il suffit de savoir intégrer ces quatre formes de fractions.

On a d'abord immédiatement [282, 283, 284]

$$\text{I}\qquad \int \frac{A\,dx}{x-a} = A\log(x-a) + C,$$

$$\text{II}\qquad \int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{(x-a)^{n-1}} + C,$$

$$\text{III}\left\{\begin{aligned} &\int \frac{(Px+Q)\,dx}{x^2-px+q} = \frac{P}{2}\log(x^2+px+q) \\ &\qquad + \left(Q-\frac{Pp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}, \end{aligned}\right.$$

la dernière intégrale ayant pour valeur, dans le cas de $q-\frac{p^2}{4}>0$,

$$\frac{Q-\frac{Pp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\text{arc tang}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

et, dans le cas de $q - \frac{p^2}{4} = 0$,

$$\frac{1}{2}\left(Q - \frac{Pp}{2}\right)\log\frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + C.$$

425. En passant enfin à la quatrième forme de fraction, nous aurons

$$\text{IV} \quad \int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}\,dx = \int \frac{P}{2}\,\frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\,dx + \int \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)\frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\frac{P}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Si l'on pose maintenant

$$x + \frac{p}{2} = z, \quad q - \frac{p^2}{4} = k^2,$$

d'où

$$x^2 + px + q = z^2 + k^2, \quad Y_n = \int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^n}.$$

on trouvera, en intégrant par parties,

$$Y_n = \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} + \int z\,\frac{2nz\,dz}{(z^2 + k^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} + 2n\int \frac{z^2 + k^2 - k^2}{(z^2 + k^2)^{n+1}}\,dz$$

$$= \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} + 2nY_n - 2nk^2 Y_{n+1},$$

d'où l'on tire la formule récurrente

$$1 \qquad 2nk^2 Y_{n+1} = \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} + (2n - 1)Y_n,$$

ou, par le changement de n en $n - 1$,

$$2 \qquad 2(n-1)k^2 Y_n = \frac{z}{(z^2 + k^2)^{n-1}} + (2n - 3)Y_{n-1},$$

et de cette formule on tirera successivement Y_n, Y_{n-1}, ..., Y_2,

cette dernière quantité étant exprimée au moyen de

$$Y_1 = \int \frac{dx}{x^2 + k},$$

qui s'intègre par un arc-tangente ou par un logarithme, suivant que k est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont complexes ou réelles [283].

Remarque. — La formule de réduction (1) peut aussi s'appliquer au cas de n négatif, c'est-à-dire à une intégrale de la forme

$$X_n = \int (x^2 + k)^{-m} dx,$$

m étant positif. Elle devient, en changeant n en $-m$, y en x,

$$(2m+1) X_n = 2mk X_{n-1} + x(x^2 + k)^{-m},$$

et conduit finalement à l'intégrale $X_0 = x + C$.

426. *Exemples.* — I. Calculer $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx$. On a

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1), \quad \frac{f'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x-1}{2x-3}.$$

Faisant successivement $x = 2$ et $x = 1$ dans cette dernière fonction, on obtient les numérateurs des fractions simples, d'où

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

et, en intégrant,

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+2} = \log \frac{(x-2)^3}{x-1} + C.$$

II. Soit la fonction

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

En posant la partie fractionnaire égale à $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, on trouve

$$x^2 = A(x^2+x+1) + Bx^2 + (C-B)x - C,$$

d'où, en identifiant les deux membres,

$$A + B = 1, \quad A - B + C = 0, \quad A + C = 0,$$

ce qui donne $A = C = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, et par suite

$$\frac{x^2}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\right).$$

En multipliant par dx et intégrant, on a enfin

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\left(\log(x - 1) + \log(x^2 + x + 1)\right) + C.$$

III. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{x^{2n} + 1}.$$

Les racines de l'équation

$$x^{2n} + 1 = 0 \quad (\cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi = e^{(2k+1)\pi i} = 0) \qquad (361)$$

sont de la forme $e^{\theta i}$, en posant

$$\theta = \frac{(2k + 1)\pi}{2n}, \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n - 1, \quad k = 1, -2, \ldots, -n,$$

ce qui correspond à $2k + 1 = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2n - 1)$. Le numérateur A d'une fraction simple $\frac{A}{x - a}$ a pour expression (à cause de $a^{2n} + 1 = 0$)

$$\frac{x^m}{2na^{2n-1}} = \frac{a^{m+1}}{2na^{2n}} = -\frac{a^{m+1}}{2n}.$$

En prenant successivement pour a deux racines conjuguées $e^{\theta i}$, $e^{-\theta i}$, et faisant la somme des fractions correspondantes, on trouve

$$-\frac{1}{2n}\left(\frac{e^{(m+1)\theta i}}{x - e^{\theta i}} + \frac{e^{-(m+1)\theta i}}{x - e^{-\theta i}}\right) = -\frac{1}{n}\,\frac{x \cos(m + 1)\theta - \cos m\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

Intégrant cette expression, et remarquant que

$$\cos(m + 1)\theta \cos\theta - \cos m\theta = -\sin(m + 1)\theta \sin\theta,$$

il vient

$$-\frac{1}{n}\int\frac{x\cos(m+1)\theta-\cos m\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}dx$$

$$=-\frac{\cos(m+1)\theta}{n}\log\sqrt{x^2-2x\cos\theta+1}$$

$$+\frac{\sin(m+1)\theta}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}+C;$$

donc

$$\int\frac{x^m dx}{x^{2n}-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\cos\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n}\log\sqrt{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}+C.$$

IV. Calculer l'intégrale

$$\int\frac{(x^2-1)^2\,dx}{(x^3-1)^4}.$$

Si l'on pose

$$\frac{x^2-1}{(x^3-1)^4}=\frac{A}{(x-1)^4}+\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\alpha^2}+\frac{D}{x-\alpha^3},$$

α et $-\alpha^2$ étant les racines cubiques complexes de -1, on aura les coefficients A, A_1, A_2, A_3 en faisant $x=1$ [420] dans la fonction $\frac{x^2-1}{x^3-1}$, et dans ses trois premières dérivées, divisées respectivement par 1, 1.2, 1.2.3, c'est-à-dire dans les expressions

$$\frac{2x-3x^2-x^4}{1.(x^3-1)^2},$$

$$\frac{2-6x-14x^2+12x^3+2x^4}{1.2.(x^3-1)^3},$$

$$\frac{-6-60x^2-96x^3-96x^4-60x^5-6x^6}{1.2.3.(x^3-1)^4},$$

ce qui donne

$$A=1,\quad A_1=-\frac{1}{2},\quad A_2=-\frac{1}{4},\quad A_3=\frac{5}{8}.$$

On a ensuite, pour la dérivée du dénominateur,

$$\varphi'(x) = 3x^2(x+1)^2 + (x^3+1)\,D_x(x+1)^2,$$

expression qui se réduit à son premier terme, lorsqu'on prend pour x une des racines de l'équation $x^3+1=0$. On a donc, pour $x=-1$,

$$B = \frac{1}{3x^2(x+1)^2} = \frac{1}{24}.$$

Ensuite, à cause de $x^2-x+1=0$,

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) = x^2+x+1,$$

d'où

$$C = \frac{-x}{3(x+1)^2} = \frac{1}{3x} = \frac{1}{D}$$

donc enfin, à cause de $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2-x+1}$,

$$\frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2x-1}{24(x^2-x+1)}$$

$$\frac{5}{8(x+1)} + \frac{1}{24(x+1)^2} - \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}$$

dont l'intégrale est

$$\int \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{3x} - \frac{1}{24(x+1)} - \frac{1}{24(x+1)}$$

$$+ \frac{5}{8}\log(x+1) - \frac{1}{24}\log(x^2-x+1)$$

$$+ \frac{1}{3}\log x - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + C.$$

V. Calculons encore l'intégrale

$$\int \frac{8x^4+3x^3+5}{x(x^2+2x+3)^3}\,dx.$$

En employant la méthode des coefficients indéterminés [422], on décomposera d'abord la quantité sous le signe $\int$ sous la forme

$$\frac{8x^4+3x^3+5}{x(x^2+2x+3)^3} = \frac{5}{27x} - \frac{37x+161}{3(x^2+2x+3)}$$

$$+ \frac{67x-181}{9(x^2+2x+3)^2} - \frac{5x+10}{27(x^2+2x+3)^3}.$$

En faisant maintenant $x+1=y$, d'où $x^2+2x+3=y^2+2$, cette expression devient

$$\frac{5}{27}\frac{dy}{y^2+2}+\frac{1}{3}\frac{37y-124}{(y^2+2)^3}-\frac{1}{9}\frac{67y-248}{(y^2+2)^2}-\frac{5}{27}\frac{y+1}{y^2+2};$$

puis on a, en intégrant,

$$\int\frac{37y-124}{(y^2+2)^3}dy=-\frac{37}{4}\frac{1}{y^2+2}-124\int\frac{dy}{(y^2+2)^3},$$

$$\int\frac{67y-248}{(y^2+2)^2}dy=-\frac{67}{2}\frac{1}{y^2+2}-248\int\frac{dy}{(y^2+2)^2},$$

$$\int\frac{y+1}{y^2+2}dy=\frac{1}{2}\lg(y^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{\sqrt{2}}+C,$$

$$\int\frac{dy}{(y^2+2)^3}=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int\frac{dy}{(y^2+2)^2}+\frac{1}{4.2}\frac{y}{(y^2+2)^2},$$

$$\int\frac{dy}{(y^2+2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+2}+\frac{1}{2.2}\frac{y}{(y^2+2)^2}.$$

En substituant toutes ces valeurs et réduisant, il vient

$$\int\frac{8x^2-3x^2+5\,dx}{(x^2+2x+3)^3}=\frac{5}{27}\lg\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$
$$-\frac{62x+25}{12(x^2+2x+3)^2}-\frac{217x-485}{72(x^2+2x+3)}$$
$$-\frac{691}{216\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

§ II.

INTÉGRATION DES IRRATIONNELLES DÉPENDANTES D'UN SEUL RADICAL CARRÉ, QUI PORTE SUR UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.

427. Soit $R=\sqrt{ax^2+bx+c}$ un radical carré, portant sur un trinôme du second degré, et $F(x, R)$ une fonction rationnelle de x et de R. Nous allons voir que le calcul de l'intégrale

$$\int F(x, R)dx$$

peut toujours se ramener, par un changement de variable, à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Mais, auparavant, on peut, si l'on veut, ramener la fonction à intégrer à une forme plus simple. En désignant par S, T, U, ... des fonctions rationnelles de x, qui peuvent être entières, on pourra mettre la fonction proposée sous les formes successives

$$F(x, R) = \frac{S + TR}{S_1 + T_1 R} = \frac{S + TR}{S_1 + T_1 R} \cdot \frac{S_1 - T_1 R}{S_1 - T_1 R} = U + VR,$$

ensuite on peut écrire

$$VR = \frac{VR}{R} = \frac{W}{R},$$

W étant, ainsi que U, une fonction rationnelle de x. Donc l'intégrale proposée peut toujours se ramener à l'intégrale d'une fonction rationnelle, plus une intégrale de la forme

$$\int \frac{W\,dx}{R}.$$

W étant une fonction rationnelle.

On peut même, en décomposant W en une partie entière et en fractions simples, ramener en dernier lieu l'intégrale proposée à des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{R}, \quad \int \frac{x^n\,dx}{R}, \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m R}, \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m R},$$

m et n étant des nombres entiers et positifs.

428. Nous allons maintenant voir comment on peut, en changeant de variable, rendre rationnelles la fonction $F(x, R)dx$ et toutes ses transformées.

On peut employer, suivant les cas, trois substitutions principales, conduisant à des expressions réelles.

I. Si, dans le trinôme $ax^2 + bx + c$, on a a positif, on posera

$$R = x\sqrt{a} - t,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \quad \frac{dx}{R} = \frac{2\,dt}{b - 2t\sqrt{a}}, \quad R = \frac{bt - t^2 - c\sqrt{a}}{b - 2t\sqrt{a}}.$$

II. Si l'on a $c > 0$, on posera

$$R = \sqrt{c} - tx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad \frac{dx}{R} = \frac{2dt}{a - t^2}, \quad R = \frac{(a + t^2)\sqrt{c} - bt}{a - t^2}.$$

III. Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, c'est-à-dire si les racines de l'équation $R^2 = 0$ sont réelles, soient α, β ces racines, et posons

$$R = (x - \alpha)t,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\alpha - \beta t^2}{a - t^2}, \quad \frac{dx}{R} = \frac{2dt}{a - t^2}, \quad R = \frac{\alpha^2 \beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Chacune de ces substitutions changera $F(x, R)dx$ en une fonction $\varphi(t)dt$ rationnelle en t.

Dans la pratique, on pourra commencer par simplifier l'expression de R, en posant

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt{a\left(y^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}.$$

De cette manière, avant d'appliquer les substitutions précédentes, on ramènera R à la forme $\sqrt{k \pm y^2}$, c'est-à-dire que l'on pourra supposer, dans les formules ci-dessus, $b = 0$, $a = \pm 1$.

429. *Exemple.* — Soit proposé de calculer l'intégrale $\int \frac{dy}{R}$, R ayant été préalablement transformé comme nous venons de l'indiquer

I. Si $R = \sqrt{y^2 + k}$, on pourra appliquer la première substitution,

$$\sqrt{y^2 + k} = y + z, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2 + k}} = -\frac{dz}{z},$$

d'où l'on tire

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + k}} = -\log z + C = -\log(\sqrt{y^2 + k} - y) + C$$
$$= \log(\sqrt{y^2 + k} + y) + C'.$$

II. Si l'on a, k étant positif, $R = \sqrt{a \ldots}$, la seconde substitution donnera

$$\sqrt{k \ldots} = \sqrt{k \ldots} z, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{\sqrt{\ldots}} = \frac{\ldots}{\ldots}.$$

En prenant le signe supérieur, il vient

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\ldots}} = \int \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots = C \ldots \sqrt{\ldots} \ldots \sqrt{\ldots} \ldots \ldots.$$

On aurait pu aussi poser $y = \sqrt{k}.\operatorname{Sh} u$, d'où $\frac{\ldots}{\sqrt{\ldots}} = du$,

$$\int \frac{\ldots}{\sqrt{\ldots}} = \ldots \operatorname{Ah} \ldots = \ldots \operatorname{Ch} \ldots = \ldots \sqrt{\ldots} = \ldots C \ldots$$

formule dont on démontrerait aisément l'identité avec la précédente; ou bien on aurait fait $z = \ldots \operatorname{Th} u$, d'où $dz = \frac{\ldots}{\operatorname{Ch}^2 \ldots} du = \ldots z^2 \ldots$ etc.

En prenant le signe inférieur, on aura

$$\int \frac{dz}{\sqrt{k \ldots}} = \int \frac{\ldots dz}{1 \ldots} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \ldots + C$$

$$= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\ldots} \ldots \sqrt{\ldots} \ldots C.$$

Autrement, en posant $\ldots = \sqrt{k} \sin \varphi$, on aurait eu

$$\int \frac{dz}{\sqrt{k \ldots}} = \ldots d\varphi = \ldots \operatorname{arc} \sin \ldots \sqrt{\ldots} \ldots C \ldots$$

On peut aisément vérifier l'identité de ces deux résultats.

III. Si l'on a, k étant > 0,

$$R = \sqrt{\ldots} = \sqrt{\ldots} \ldots \sqrt{\ldots} \ldots = \sqrt{k} \ldots - \sqrt{k} \ldots,$$

en posant

$$\sqrt{\ldots} = \ldots \sqrt{k} \ldots z.$$

il vient

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm(y^2-k)}} = \frac{\pm 2dz}{z^2\pm 1} = \frac{2dz}{1\mp z^2}.$$

En prenant le signe supérieur, il en résulte

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-k}} = \log\frac{1+z}{1-z} + C = \log\frac{y-\sqrt{k}+\sqrt{y^2-k}}{y-\sqrt{k}-\sqrt{y^2-k}} + C.$$

On aurait pu encore poser $y = \sqrt{k}\,\mathrm{Ch}\,u$, d'où

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-k}} = \mathrm{Arg\,Ch}\frac{y}{\sqrt{k}} + C = \log\left(y+\sqrt{y^2-k}\right) + C.$$

En prenant le signe inférieur, on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{k-y^2}} = 2\,\mathrm{arc\,tang}\,z + C = 2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{k}-y}{\sqrt{k}+y} + C.$$

Si l'on voulait avoir l'intégrale $\int \frac{dx}{R}$ exprimée directement en fonction de x, on n'aurait qu'à remplacer y et k par leurs valeurs en x, a, b, c.

430. Voici quelques autres exemples qui se ramènent au précédent. Soit proposé de calculer l'intégrale

$$\int \frac{(mx+n)dx}{R}.$$

On a

$$x = \frac{1}{2a}(2ax+b) - \frac{b}{2a},$$

d'où

$$mx+n = \frac{m}{2a}(2ax+b) + n - \frac{bm}{2a},$$

et par suite

$$\int \frac{(mx+n)dx}{R} = \frac{m}{a}\int \frac{ax+\frac{b}{2}}{R}dx + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int\frac{dx}{R}$$
$$= \frac{m}{a}R + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int\frac{dx}{R}.$$

On a ensuite, en intégrant par parties,

$$\int R\,dx = Rx - \int \frac{x\left(ax + \frac{b}{2}\right)dx}{R}$$

$$= Rx - \int R\,dx - \int \frac{\left(\frac{b}{2}x + c\right)dx}{R},$$

d'où

$$\int R\,dx = \frac{1}{2}Rx + \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{b}{2}x + c\right)dx}{R},$$

ce qui ramène au cas précédent.

431. On a

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(1-x^2+x^2)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'ailleurs

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

On aurait pu calculer plus simplement cette intégrale, en posant $x = \operatorname{Sh} u$, d'où $dx = \operatorname{Ch} u\,du$, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{Ch}^3 u$,

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{\operatorname{Ch}^2 u} = \operatorname{Th} u + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

On calculerait de la même manière l'intégrale $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, soit en intégrant par décomposition et par parties, soit en posant $x = \sin u$.

432. Si F désigne une fonction rationnelle, l'intégrale

$$\int F\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'}\right)dx$$

se ramènera à la forme de l'intégrale

$$\int F(x, R)\,dx,$$

en posant $\sqrt{ax+b} = y$, d'où

$$x = \frac{y^2 - b}{a}, \quad \sqrt{a'x+b'} = \sqrt{a'\frac{y^2-b}{a}+b'}.$$

On rendra encore rationnelle la différentielle

$$F(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx,$$

en posant $\sqrt[n]{ax+b} = y$, et la différentielle

$$F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx,$$

en posant $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}} = y$.

§ III.

DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES. — CAS D'INTÉGRABILITÉ. FORMULES DE RÉDUCTION.

433. On appelle *différentielles binômes* les expressions de la forme

$$du = (ax^n + b)^p x^m\,dx, \tag{1}$$

m, n, p étant trois nombres rationnels, a et b des constantes.

On peut d'abord, sans diminuer la généralité de l'expression (1), assujettir les exposants m et n à certaines restrictions.

1° On peut toujours faire en sorte que les exposants m et n soient entiers. En effet, si ces exposants ont des valeurs fractionnaires

$$m = \frac{\mu}{\mu'}, \quad n = \frac{\nu}{\nu'},$$

en posant $x = y^{\mu'\nu'}$, on aura

$$x^m = y^{\mu\nu'}, \quad x^n = y^{\mu'\nu}, \quad dx = \mu'\nu' y^{\mu'\nu'-1}\,dy,$$

et du prendra la forme

$$du = [illegible] y^{\mu'} (ay^{[illegible]} + b)^{[illegible]} y^{[illegible]} dy,$$

où les exposants m et n sont remplacés par des exposants entiers.

On aurait pu, si μ' et ν' ne sont pas premiers entre eux, poser, pour plus de simplicité, $x = y^{M}$, M étant le plus petit multiple commun de μ' et ν'.

2° On peut faire en sorte que n soit toujours positif; car, si n était négatif et $= -n'$, on poserait alors $x = \frac{1}{y}$, d'où

$$du = [illegible] (ay^{[illegible]} + b)^{[illegible]} y^{[illegible]} dy,$$

ou encore on remarquerait que

$$[illegible] x^{[illegible]} (ax^{[illegible]} + b)^{[illegible]} = [illegible] (bx^{[illegible]} + a)^{[illegible]},$$

d'où

$$du = [illegible] (bx^{n'} + a)^{[illegible]} dx,$$

expression où n est encore remplacé par un nombre positif.

Ainsi l'on est toujours maître de supposer, si l'on y trouve avantage,

$$\left.\begin{array}{l} m, n \text{ entiers,} \\ n \text{ positif.} \end{array}\right\} \text{ sans altérer la valeur de } p,$$

p étant un nombre rationnel quelconque, positif ou négatif.

434. *Cas particuliers d'intégrabilité immédiate.*

I. Si p est entier, en rendant m et n entiers, on obtiendra une fonction rationnelle, que nous savons intégrer.

Si p est entier et positif, l'intégration se ramènera immédiatement à celle d'un polynôme, et pourra s'effectuer, sans même qu'il soit nécessaire de rendre m et n entiers.

II. Si l'on a $m = n - 1$, alors, en posant $ax^n + b = y$, on aura

$$x^m dx = x^{n-1} dx = \frac{1}{an} dy, \quad \text{d'où} \quad du = \frac{1}{an} y^p dy.$$

Donc, pour p différent de -1,

$$u = \frac{y^{p+1}}{an(p+1)} + C = \frac{(ax^n + b)^{p+1}}{an(p+1)} + C,$$

et, pour $p = -1$,

$$u = \frac{\log y}{an} + C = \frac{1}{an} \log(ax^n + b) + C,$$

ce dernier cas rentrant d'ailleurs dans le cas I.

III. Nous avons vu [433] que l'on peut écrire aussi du sous la forme

$$du = (a + bx^{-n})^p x^{m+np} dx. \tag{2}$$

On se trouvera donc dans le cas précédent, si l'on a

$$m + np + n - 1, \quad \text{ou} \quad m + n(p+1) + 1 = 0.$$

On posera alors

$$a + bx^{-n} = y, \quad \text{ou} \quad ax^n + b = x^n y,$$

d'où

$$x^{m+np} dx = x^{-n-1} dx = -\frac{1}{bn} dy,$$

et par suite

$$du = -\frac{1}{bn} y^p dy.$$

On en tire, pour p différent de -1,

$$u = -\frac{y^{p+1}}{bn(p+1)} + C = -\frac{1}{bn(p+1)} \left(\frac{ax^n + b}{x^n}\right)^{p+1} + C,$$

et pour $p = -1$, ce qui rentre d'ailleurs dans le cas I,

$$u = \frac{1}{bn} \log \frac{x^n}{ax^n + b} + C.$$

433. *Cas généraux d'intégrabilité.* — Cherchons quelles sont les transformations qui peuvent, en général, rendre l'expression du rationnelle.

I. Prenons du sous la forme

$$du = (ax^n + b)^p x^m dx, \tag{1}$$

et posons

$$ax^n + b = y,$$

d'où

$$nax^{n-1} dx = dy, \quad du = y^p . x^m \frac{dy}{anx^{n-1}} = \frac{1}{an} x^{m-n+1} y^p dy,$$

ou, en mettant pour x sa valeur $\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,

$$du = \frac{1}{an}\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} y^p dy,$$

expression de même forme que l'expression (1), les exposants m, n, p étant remplacés respectivement par p, 1, $\frac{m+1}{n}-1$. Cette expression sera donc intégrable [434, I], si $\frac{m+1}{n}$ est entier. On a donc le premier cas général d'intégrabilité, lorsque

$$\text{A}, \qquad \frac{m+1}{n} \text{ entier},$$

ce qui comprend, comme cas particulier, le cas II du numéro précédent, pour lequel $\frac{m+1}{n} = 1$.

Dans la pratique, lorsque p n'est pas entier, mais égal à une fraction $\frac{q}{r}$, il est plus commode de poser

$$ax^n - b = y^r, \quad \text{d'où} \quad anx^{n-1}dx = ry^{r-1}dy,$$

$$du = y^q x^m \frac{ry^{r-1}dy}{anx^{n-1}} = \frac{r}{an}\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} y^{q+r-1}dy,$$

expression qui ne contient plus d'irrationnalité, si $\frac{m+1}{n}$ est entier.

II. Prenons du sous la forme

$$du = (ax^n+b)^p x^m dx.$$

En appliquant à cette expression la condition d'intégrabilité (A), où l'on remplacera m par $np+m$, on aura le second cas général d'intégrabilité, pour

$$\text{(B)} \qquad \frac{np+m+1}{n} = \text{entier},$$

ou, en supposant $p = \frac{q}{r}$,

$$\text{(B')} \qquad \frac{q}{r} + \frac{m+1}{n} = \text{entier}.$$

Nous poserons alors $a + bx^{-n} = y^r$, ou plutôt

$$a + bx^{-n} = y^r, \quad \text{d'où} \quad -bnx^{-n-1}dx = ry^{r-1}dy,$$

$$du = -y^q x^{np+m} \frac{ry^{r-1}dy}{bnx^{-n-1}} = -\frac{r}{bn}\left(\frac{b}{y^r - a}\right)^{\frac{q}{r}+\frac{m+1}{n}+1} y^{q+r-1}dy,$$

expression rationnelle, si la condition (B′) est remplie.

Pour $p + \frac{m+1}{n} + 1 = 0$, on retrouve le cas III du n° 434.

436. *Exemples.* — I. Soit l'expression

$$du = (ax^2 + b)^{\frac{q}{2}} x^m dx,$$

m et q étant entiers, et q impair.

1° Si m est impair, $\frac{m+1}{2}$ est entier, et l'on rendra l'expression rationnelle, en posant

$$ax^2 + b = y^2, \quad \text{d'où} \quad du = \frac{1}{a}\left(\frac{y^2 - b}{a}\right)^{\frac{m-1}{2}} y^{q+1}dy.$$

2° Si m est pair, $\frac{q}{2} + \frac{m+1}{2}$ est entier, et l'on aura, par le cas II du numéro précédent,

$$a + bx^{-2} = y^2, \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{1}{b}\left(\frac{b}{y^2 - a}\right)^{\frac{q+m+2}{2}} y^{q+1}dy.$$

La différentielle

$$(ax^2 + b)^{\frac{q}{2}}(x - c)^m dx$$

se ramènerait à une somme d'expressions semblables à la précédente, dans le cas de m entier et positif.

II. Considérons la différentielle binôme

$$du = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} x^5 dx.$$

Ici $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{2}$ étant entier, nous poserons

$$1 - x^2 = y^7,$$

d'où

$$du = -\frac{7}{2}(1 - y^7)^2 y^8 dy = -\frac{7}{2}(y^8 - 2y^{15} + y^{22})dy$$

d'où, en intégrant et remettant pour y sa valeur,

$$u = -\frac{7}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{9}(1-x^2)^2 - \frac{1}{8}(1-x^2) + \frac{1}{25}(1-x^2)^3\right] + C.$$

III. Soit encore la différentielle

$$du = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Ici $p = \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2}$, $\frac{3+1}{8} = 0$ est entier. Nous poserons donc

$$1-x^2 = y^2, \quad \text{d'où} \quad du = \frac{1}{2}x^2\,dy = \frac{1}{4}\frac{dy}{1-y^2},$$

et, en intégrant,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{8}\log\frac{y-1}{y+1} + C = \frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x} + C$$

$$= \frac{1}{4}\log(x+\sqrt{1-x^2}) + C.$$

137. *Formules de réduction.* — On peut faire subir à une différentielle binôme certaines transformations, ayant pour effet de simplifier l'intégration, lorsqu'elle est possible, et, dans le cas contraire, de ramener l'intégrale à certains types plus simples et plus faciles à comparer.

Ces transformations consistent à ramener les exposants m et p entre certaines limites déterminées, de telle sorte, par exemple, que l'exposant m se trouve compris entre zéro et n, et l'exposant p entre zéro et $+1$, ou entre zéro et -1.

Posons, pour abréger,

$$u_{m,p} = \int x^m (ax^n + b)^p\,dx,$$

et intégrons par parties, en prenant $x^m dx$ pour différentielle. Il viendra

$$u_{m,p} = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(ax^n+b)^p - \frac{anp}{m+1}\int (ax^n+b)^{p-1}x^{m+n}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(m+1)u_{m,p} = x^{m+1}(ax^n+b)^p - npau_{m+n,p-1},$$

formule qui fait varier à la fois les deux exposants m et p, en augmentant le premier de n et diminuant le second de l'unité.

Si nous changeons m en $m-n$, p en $p+1$, nous aurons la formule

$$(2)\quad (n(p+1)a u_{m,p} = x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)u_{m-n,p+1},$$

qui sert à diminuer l'exposant m de n, en augmentant p de l'unité.

On aurait pu obtenir directement la formule (2), en prenant pour différentielle, dans l'intégration par parties, la quantité $(ax^n+b)^p x^{m-n+1}dx$, intégrée dans le cas II du n° 434.

438. Si l'on ne veut pas faire varier à la fois les deux exposants m et p en sens inverse, on transformera les formules précédentes de manière à faire varier un seul des deux exposants, l'autre restant constant.

1° Si l'on ne veut faire varier que p, nous remarquerons que, la quantité x^n pouvant se mettre sous la forme $\frac{1}{a}(ax^n+b-b)$, l'intégrale $u_{m+n,p-1}$ du second membre de la formule (1) pourra s'écrire ainsi :

$$\int (ax^n+b)^{p-1}\left(\frac{ax^n+b}{a}-\frac{b}{a}\right)x^m dx$$

$$\frac{1}{a}\int (ax^n+b)^p x^m dx - \frac{b}{a}\int (ax^n+b)^{p-1}x^m dx,$$

ce qui change la formule (1) dans la suivante :

$$(3)\quad (m+np+1)u_{m,p} = x^{m+1}(ax^n+b)^p + npbu_{m,p-1},$$

qui diminue p sans changer m.

Si l'on veut augmenter p sans changer m, on n'aura qu'à remplacer, dans la formule (3), $p-1$ par p, ce qui donnera

$$(4)\quad (n(p+1)bu_{m,p} = -x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m-n+np+1)u_{m,p+1}.$$

2° Si l'on veut faire varier m sans changer p, nous partirons de la formule (2), où l'intégrale du second membre peut s'écrire

$$u_{m-n,p+1} = \int (ax^n+b)^p(ax^n+b)x^{m-n}dx = au_{m,p} + bu_{m-n,p};$$

donc

$$(5)\quad (m+np+1)au_{m,p} = x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)bu_{m-n,p},$$

formule qui diminue m, sans changer p.

Pour augmenter m sans changer p, remplaçons, dans (5), $m-n$ par m, et nous aurons

$$(6)\quad (m+1)bu_{m,p} = x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} - (m+np+1)au_{m+n,p}.$$

439. *Discussion des formules précédentes.* — Les formules (1) et (6) sont en défaut pour $m=-1$. Mais alors $\frac{m+1}{n}+p=0$ est entier, et, en posant (435, I) $a+bx^n=y^r$, du devient égal à

$$\frac{r(p+1)}{n(y^r-a)}\,dy,$$

expression rationnelle.

Les formules (2) et (4) sont en défaut pour $p+1=0$, ce qui rentre dans le cas I du n° 434.

Les formules (3) et (5) sont en défaut pour $m+np+1=0$, auquel cas $p+\frac{m+1}{n}=0$ est entier, ce qui rentre dans le cas du n° 435. On a alors

$$du = \frac{r(p+1)}{n(y^r-a)}\,b,$$

expression rationnelle.

Les formules (2) et (5) donnent immédiatement l'intégrale, lorsqu'on a [434, II]

$$m-n+1=0.$$

Les formules (4) et (6) donnent immédiatement l'intégrale, lorsqu'on a [434, III]

$$m+n+np+1=0.$$

440. *Exemples.* — I. Considérons l'intégrale

$$u_{0,-\frac{3}{2}} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En lui appliquant la formule (4) pour augmenter l'exposant $p=-\frac{3}{2}$, il vient

$$u_{0,-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2(-\frac{3}{2}+1)}\left[-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + (0+2-3-1)u_{0,-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad [431].$$

II. Transformons l'intégrale $u_{7,\frac{5}{3}} = \int (1-x^3)^{\frac{5}{3}} x^7\,dx$. La formule (3) donne

$$13u_{7,\frac{5}{3}} = x^8(1-x^3)^{\frac{5}{3}} + 5u_{7,\frac{2}{3}},$$

$$10u_{7,\frac{2}{3}} = x^8(1-x^3)^{\frac{2}{3}} + 2u_{7,-\frac{1}{3}};$$

puis on a, par la formule (5),

$$7u_{7,-\frac{1}{3}} = x^6(1-x^3)^{\frac{2}{3}} - 5u_{4,-\frac{1}{3}},$$

$$4u_{4,-\frac{1}{3}} = x^2(1-x^3)^{\frac{2}{3}} - 2u_{1,-\frac{1}{3}}.$$

Ainsi le calcul de l'intégrale proposée est ramené à celui de l'intégrale

$$u_{1,-\frac{1}{3}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

III. En appliquant la formule (4) à l'intégrale $u_{0,-n} = \int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n}$, il vient [425]

$$(2n-2)u_{0,-n} = \frac{x}{(x^2+k^2)^{n-1}} + (2n-1)u_{0,-n+1}.$$

IV. Soit encore l'intégrale

$$X_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int (2a-x)^{-\frac{1}{2}} x^{m-\frac{1}{2}}\,dx = u_{m-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la formule (5), il vient

$$-mX_m = x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2} - (2m-1)aX_{m-1},$$

ou, en changeant m en $m+1$,

$$a(2m+1)X_m = x^m\sqrt{2ax-x^2} + (m+1)X_{m+1},$$

formules qui conduisent, pour m entier, positif ou négatif, à $X_0 = \arcsin\frac{x-a}{a}$.

441. On peut ramener aux différentielles binômes toute intégrale de la forme

$$Z_{\mu,\nu} = \int (az+b)^\mu (a'z+b')^\nu\,dz,$$

en posant l'un des binômes, $a'z+b'$ par exemple, égal à x, ou encore à $x^{\frac{1}{2}}$, si z est une fraction $\frac{1}{2}$.

Mais on peut aussi traiter cette intégrale directement, en suivant absolument la même marche que pour les différentielles binômes. Remarquons qu'il est avantageux, pour la symétrie des calculs, de prendre ici la formule de l'intégration par parties sous la forme

$$\int f(x)\,dx\log x = u\int f(x)\,dx - \int u\,f(x)\,dx.$$

§ IV.

AUTRES EXEMPLES D'INTÉGRATION PAR DES FORMULES DE RÉDUCTION SUCCESSIVE.

442. L'intégrale

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

m et n étant des entiers quelconques, peut se ramener à l'intégrale d'une différentielle binôme, en posant $\sin x = y$, d'où

$$\int y^m (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dy,$$

ce qui rentre dans le cas traité au paragraphe précédent. Si n est impair, on a immédiatement une fonction rationnelle. Si m est impair, on rendra de même cette expression rationnelle, en posant $\cos x = z$.

443. On peut aussi trouver directement les formules de réduction pour cette intégrale. On a, en intégrant par parties,

$$\int \sin^{m-1} x \cos^n x\,d\cos x$$
$$= \frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx,$$

ou bien

$$(1)\qquad (n+1)\,e_{m,n} = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\,e_{m-2,n+2}.$$

En intégrant autrement par parties, ou, ce qui revient au même, en changeant dans la formule précédente m en $m+2$, n en $n-2$, on a

$$(2)\qquad (m+1)\,e_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\,e_{m+2,n-2}.$$

Si l'on ne veut faire varier que le seul exposant m, on remarquera que

$$v_{m-1,n+1} = \int \sin^{m-1}x \cos^{n}x \,(1 - \sin^2 x)\,dx = v_{m-1,n} - v_{m,n},$$

ce qui change la formule (1) dans la suivante :

$$(3) \qquad (m+n)\,v_{m,n} = \sin^{m-1}x \cos^{n+1}x + (m-1)\,v_{m-2,n}.$$

En changeant m en $m+2$, il vient

$$(4) \qquad (m+n+2)\,v_{m+2,n} = \sin^{m+1}x \cos^{n+1}x + (m+n+2)\,v_{m,n}.$$

Si l'on traite de même la formule (2), en remarquant que $v_{m+2,n-2} = v_{m,n-2} - v_{m,n}$, on en tire les formules

$$(5) \qquad (m+n)\,v_{m,n} = \sin^{m+1}x \cos^{n-1}x + (n-1)\,v_{m,n-2},$$

$$(6) \qquad (n-1)\,v_{m,n} = -\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x + (m+n-2)\,v_{m,n+2}.$$

444. Les formules (1) et (6) sont en défaut pour $n = -1$. Quand on a amené l'exposant n à cette valeur, on fait alors varier m par l'une des formules (3) ou (4), qui ramènent $v_{m,-1}$ à l'une des valeurs

$$v_{0,-1} = \int \frac{dx}{\cos x}, \quad v_{1,-1} = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}, \quad v_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

suivant que m est pair, ou impair et positif, ou impair et négatif.

Les formules (2) et (4) sont en défaut pour $m = -1$. Alors, en faisant varier n, on ramènera $v_{-1,n}$ à l'une des intégrales

$$v_{-1,0} = \int \frac{dx}{\sin x}, \quad v_{-1,1} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}, \quad v_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Les formules (3) et (5) sont en défaut pour $m + n = 0$. Alors l'intégrale $v_{m,-m}$ est de la forme

$$w_m = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \operatorname{tang}^m x\,dx,$$

et les formules (1) et (2) donnent les suivantes :

$$(7) \qquad -(m-1)\,w_m = -\operatorname{tang}^{m-1}x + (m-1)\,w_{m-2},$$

$$(8) \qquad (m+1)\,w_m = \operatorname{tang}^{m+1}x - (m+1)\,w_{m+2},$$

qui ramènent w_m à l'une des intégrales

$$w_0 = \int dx, \quad w_1 = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \operatorname{tang} x\,dx, \quad w_{-1} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \cot x\,dx.$$

445. En résumant tous les cas qui peuvent se présenter, on est ramené aux intégrales suivantes [279, 281, 282] :

$$\int dx = x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C,$$

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \log \sec x + C, \quad \int \cot x\,dx = \log \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tang} x} = \log \operatorname{tang} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} = \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Autrement, en posant $\cos x = y$, d'où $\sin x\,dx = -dy$, on a

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1 - y}{1 + y} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C$$

$$= \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}x + C.$$

De même, en posant $\sin x = y$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Remarquons encore que les formules (1) et (3) donnent immédiatement la valeur de l'intégrale pour $m = 1$,

$$(9) \qquad \int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C.$$

Les formules (2) et (5) donnent l'intégrale pour $n = 1$,

$$(10) \qquad \int \sin^m x \cos x\,dx = \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x + C.$$

Les formules (4) et (6) donnent l'intégrale pour $n = -m - 2$,

$$(11) \qquad \int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{m+2} x} = \int \operatorname{tang}^m x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{m+1} \operatorname{tang}^{m+1} x + C.$$

446. On peut abréger le calcul dans les cas suivants :

1° Un des exposants, n par exemple, est impair et positif. On le diminue, par la formule (5), jusqu'à le rendre égal à l'unité, ce qui ramène à la formule (10) pour m différent de -1, ou, pour $m = -1$, à l'intégrale $\int \cot x\,dx = \log \sin x + C$.

Ou encore, en posant $n = 2p + 1$,

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\,dx,$$

et, en développant $(1 - \sin^2 x)^p$, on obtient un polynôme dont tous les termes s'intègrent par la formule (10).

2° Si n est pair, on le ramène à la valeur zéro par la formule (5) ou (6), puis on réduit $\int \sin^m x\,dx$ à l'une des intégrales $\int dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{dx}{\sin x}$; ou encore, si m est positif, on développe, par les formules connues, $\sin^m x$ en une somme de sinus ou de cosinus des multiples de x.

3° Si m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs, on les fait varier ensemble ou séparément, de manière à les rendre égaux et de même signe, ou bien égaux et de signes contraires. Dans ce dernier cas, on applique les formules (7) ou (8). Dans le cas où $m = n$, on a alors, en faisant $2x = y$,

$$\int \sin^m x \cos^m x\,dx = \frac{1}{2^m} \int \sin^m 2x\,dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int \sin^m y\,dy,$$

ce qui conduit à un cas déjà traité.

4° Si l'un des exposants, n par exemple, est impair et négatif, $= -p$, alors, en posant

$$u_{m,p} = \int \frac{\sin^m x}{\cos^p x}\,dx,$$

on fait varier p par l'une des formules

$$(p-1)u_{m,p} = \frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{p-1} x} - (m-1)u_{m-2,p-2},$$

$$(p-1)u_{m,p} = \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{p-1} x} - (m-p+2)u_{m,p-2},$$

et l'on arrivera ainsi à l'intégrale $u_{m-1} = \int \frac{\sin^{m-1} x}{\cos x} dx$. Or on a

$$\frac{\sin^{2q} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1 - \sin^{2q} x}{1 - \sin^2 x} \cos x$$

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x \left(1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots + \sin^{2q-2} x\right).$$

d'où

$$\int \frac{\sin^{2q} x}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} - \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} - \ldots - \frac{\sin^{2q-1} x}{2q-1} + C.$$

$$\int \frac{\sin^{2q+1} x}{\cos x} dx$$

$$= \int \operatorname{tang} x \, dx - \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} - \ldots - \frac{\sin^{2q} x}{2q} + C.$$

447. Voici une formule générale de réduction qui s'applique à un grand nombre d'intégrales. Soit u une fonction de x que l'on sache intégrer, et v une autre fonction de x. Proposons-nous de calculer l'intégrale

$$\int u v^n dx,$$

n étant un nombre entier, que l'on peut supposer positif, le cas de n négatif se ramenant à celui de n positif par le changement de v en $\frac{1}{v}$. On a, en intégrant par parties et posant $u_1 = \int u dx$,

$$\int u v^n dx = u_1 v^n - n \int u_1 v^{n-1} dx.$$

Supposons maintenant que l'on sache calculer l'intégrale

$$u_2 = \int u_1 dv = \int u_1 \frac{dv}{dx} dx.$$

On trouvera, en intégrant de nouveau par parties,

$$\int u_1 v^{n-1} dv = u_2 v^{n-1} - (n-1) \int u_2 v^{n-2} dv.$$

Si l'on peut continuer à calculer successivement toutes les intégrales

$$u_3 = \int u_2 dv, \quad u_4 = \int u_3 dv, \quad \ldots, \quad u_n = \int u_{n-1} dv,$$

on arrivera jusqu'à l'intégrale

$$u_{n+1} = \int u_n dv,$$

qui ne contiendra plus v, mais seulement sa différentielle. Cette formule est particulièrement utile dans le cas où v est une transcendante à différentielle algébrique.

448. *Exemples.* — I. Soit l'intégrale

$$z_n = \int (\log x)^n dx.$$

En prenant $u = 1$, $v = \log x$, on aura, par le calcul précédent,

$$z_n = x(\log x)^n - n z_{n-1}, \quad z_{n-1} = x(\log x)^{n-1} - (n-1) z_{n-2}, \quad \ldots,$$

jusqu'à $z_2 = x(\log x)^2 - 2z_1$, $z_1 = x\log x - x$, et l'on en tire z_n par des substitutions successives.

Si l'on donne, au contraire, l'intégrale

$$y_n = \int \frac{dx}{(\log x)^n},$$

la formule qui donnait z_n deviendra, en changeant n en $-n$, puis $n+1$ en n,

$$y_n = \frac{x}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{y_{n-1}}{n-1},$$

et elle conduira à l'intégrale

$$y_1 = \int \frac{dx}{\log x},$$

c'est-à-dire à la transcendante $\mathrm{li}\,x$ [362, II].

Si l'on pose $x = e^t$, les mêmes intégrales deviendront

$$z_n = \int e^t t^n dt, \quad y_n = \int \frac{e^t}{t^n} dt,$$

et on les traitera de la même manière, en prenant $u = e^t$, $v = t$.

On transformerait aussi par le même procédé l'intégrale

$$\int x^m (\log x)^n dx,$$

en faisant $u = x^m$, $v = \log x$. Mais on peut ramener cette intégrale

au cas précédent, en posant, pour m différent de -1,

$$x^m = \xi,$$

d'où

$$\int x^m \log x\, dx = \frac{\int \log \xi\, d\xi}{m+1}.$$

II. Soit l'intégrale

$$z = \int \arcsin x\, dx.$$

En posant $u = 1$, $v = \arcsin x$, on a

$$u_1 = \int u\, dx = x, \quad v_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$u_2 = -x, \quad v_2 = \sqrt{1-x^2}, \quad \ldots \quad \ldots$$

d'où l'on tire

$$z = x \arcsin x - x\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \ldots + x \arcsin x + \ldots$$

Autrement, on fera $\arcsin x = t$, d'où $z = \int t \cos t\, dt$, $v = t$, $u = \cos t$, etc.

449. *Exemples divers d'intégration.* — Soit proposé de calculer l'intégrale

$$\int \sin ax \sin a'x\, dx.$$

On décomposera le produit de sinus en une différence de cosinus,

$$\frac{1}{2}\cos(a-a')x - \frac{1}{2}\cos(a+a')x = \frac{1}{2}\cos(a-a')x - \frac{1}{2}\cos(a+a')x,$$

ce qui donne en intégrant, pour $a \pm a'$ différent de zéro,

$$\frac{\sin(a-a')x}{2(a-a')} - \frac{\sin(a+a')x}{2(a+a')} + C.$$

Pour $a = a' = 0$, l'un des termes se réduit à $\frac{1}{2}\int \sin^2 bx\, dx$.

Le même procédé pourrait être employé pour calculer l'intégrale $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, en changeant $\sin^m x$ et $\cos^n x$ en deux sommes de sinus et de cosinus des multiples de x, et effectuant le produit des deux polynômes, ce qui amènerait à une somme d'intégrales telles que $\int \sin px \cos qx\, dx$.

On a, en particulier,

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

450. Pour calculer l'intégrale $\int dx\sqrt{1+\cos x}$, on changera $1+\cos x$ en $2\cos^2\frac{1}{2}x$, d'où il résultera

$$\int dx\sqrt{1+\cos x}\,dx = \int dx.\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x$$
$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}x + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C.$$

On aura de même

$$\int dx\sqrt{1-\cos x}\,dx = \int dx.\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}x$$
$$= -2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x + C = -2\sqrt{1+\cos x} + C.$$

451. Pour intégrer une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$, telle que $f(\sin x, \cos x)dx$, on pourrait poser $\sin x = y$, d'où

$$\cos x = \sqrt{1-y^2}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

et l'on ramènerait ainsi l'expression proposée à une irrationnelle du second degré de la forme de celles que nous avons traitées dans le § II de ce Chapitre.

Mais on peut obtenir immédiatement une expression rationnelle en posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z$, d'où

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = 2\,d\operatorname{arc\,tang} z = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Si l'on donne, en général, à intégrer une fonction rationnelle de la forme

$$f(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots)\,dx,$$

comme le sinus et le cosinus d'un multiple de x sont eux-mêmes des fonctions rationnelles de $\sin x$ et de $\cos x$, on ramènera immédiatement ce cas à celui que nous venons de considérer.

452. Étant proposée une intégrale de la forme

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x},$$

au lieu d'employer la transformation générale du numéro précédent, il sera plus simple de calculer les constantes k, l par les équations

$$a = l\sin\alpha + k\cos\alpha,$$

et alors l'intégrale proposée deviendra

$$\int \frac{dx}{l\sin(x+\alpha) + k\cos(x+\alpha)}$$

et se calculera par les formules du n° 442.

453. Soit encore l'intégrale $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$. Posons [451]

$$\tang\frac{1}{2}(x+\alpha) = y,$$

et l'intégrale deviendra

$$2\int \frac{dy}{a + b + (a - b)y^2}.$$

Distinguons maintenant deux cas, suivant que $\frac{a-b}{a+b}$ sera positif ou négatif.

1° Soit $\frac{a-b}{a+b}$ positif et $= k^2$; il viendra

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a+b}\int \frac{dy}{1 + k^2y^2}$$

$$= \frac{2}{a+b}\,\frac{1}{k}\int \frac{d(ky)}{1 + (ky)^2} = \frac{2}{a+b}\,\frac{1}{k}\,\text{arc tang}(ky) + C,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\text{arc tang}\left(k\,\tang\frac{1}{2}x\right) + C.$$

2° Soit $\frac{a-b}{a+b}$ négatif et $= -k^2$. Alors

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a+b}\int \frac{dy}{1 - k^2y^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\log\frac{1 + k\,\tang\frac{1}{2}x}{1 - k\,\tang\frac{1}{2}x} + C$$

L'intégrale

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$$

se ramène immédiatement à la précédente, en mettant $b\cos x + c\sin x$ sous la forme $k\cos(x + l)$.

454. Si l'on propose d'intégrer une expression de la forme $\frac{f(\cos x)}{\varphi(\cos x)}\,dx$, f et φ désignant deux fonctions rationnelles et entières, on commencera par décomposer cette expression en une partie entière par rapport à $\cos x$ et en fractions simples. Celles qui correspondront aux racines simples de $\varphi(\cos x) = 0$ seront de la forme que nous venons de traiter. Celles qui correspondront aux racines multiples seront de la forme

$$\frac{A\,dx}{(a + b\cos x)^n}.$$

Si l'on avait $a = \pm b$, ce cas se ramènerait à un cas déjà traité [**442** et suiv.], en introduisant l'angle $\frac{1}{2}x$.

Pour réduire, dans le cas général, l'intégrale $\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$, mettons-la sous la forme

$$\int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^n\,dx}{(a + b\cos x)^n};$$

à cause de $\cos^2 x = \left(\frac{a + b\cos x}{b} - \frac{a}{b}\right)^2$, on aura, en posant

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = u_n,$$

$$u_n = \frac{1}{b^2}\left(u_{n-2} - 2au_{n-1} + a^2 u_n\right) + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{(a + b\cos x)^n},$$

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{1}{(n-1)b}\int \sin x\,d.(a + b\cos x)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)b}\left[\frac{\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - \int \frac{\cos x\,dx}{(a + b\cos x)^{n-1}}\right].$$

D'ailleurs,

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} = \frac{1}{b}\left(u_{n-2} - au_{n-1}\right).$$

En substituant ces diverses expressions, il vient finalement

$$(n-1)(b^2-a^2)u_n = \frac{b\sin x}{a+b\cos x}(\ldots) + (n-2)u_{n-2} - (2n-3)au_{n-1},$$

formule qui servira à réduire l'exposant n, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à $n=1$, c'est-à-dire au cas du numéro précédent.

455. Ajoutons encore quelques exemples d'intégration par les séries (362).

I. Soit l'intégrale d'une différentielle binôme

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx.$$

Si l'on suppose, en valeur absolue, $ax^n < b$, on aura alors le développement convergent (348)

$$(ax^n+b)^p = b^p\left(1+\frac{ax^n}{b}\right)^p$$
$$= b^p + pb^{p-1}ax^n + p_2b^{p-2}a^2x^{2n} + \ldots$$

d'où l'on tire, en multipliant par $x^m dx$ et intégrant,

$$\int(ax^n+b)^p x^m dx = b^p\frac{x^{m+1}}{m+1} + pb^{p-1}a\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \ldots + C.$$

Si, au contraire, $ax^n > b$ en valeur absolue, on aura

$$(ax^n+b)^p = a^px^{pn}\left(1+\frac{b}{ax^n}\right)^p$$
$$= a^px^{pn} + pba^{p-1}x^{(p-1)n} + p_2b^2a^{p-2}x^{(p-2)n} + \ldots,$$

d'où

$$\int(ax^n+b)^p x^m dx = a^p\frac{x^{pn+m+1}}{pn+m+1}$$
$$+ pba^{p-1}\frac{x^{(p-1)n+m+1}}{(p-1)n+m+1} + \ldots + C.$$

II. Soit l'intégrale elliptique de première espèce

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

où $x = \sin\varphi$, et $k^2 < 1$. Développons le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \ldots$$

cette série étant convergente pour $x^2 \leqq 1$ ou pour φ réel quelconque. En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi$, intégrant, et posant

$$X_n = \int_0^x \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\varphi \sin^n\varphi d\varphi,$$

on aura le développement de u sous la forme

$$u = X_0 + \frac{1}{2}k^2X_2 + \frac{1.3}{2.4}k^4X_4 + \ldots,$$

où $X_0 = \text{arc}\sin x = \varphi$.

Autrement, on développera les deux facteurs

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \ldots,$$

et l'on multipliera entre elles les deux séries, qui sont convergentes pour $x^2 < 1$. On obtiendra de cette manière un développement de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + K_1x^2 + K_2x^4 + \ldots,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$u = x + K_1\frac{x^3}{3} + K_2\frac{x^5}{5} + \ldots = \sin\varphi + K_1\frac{\sin^3\varphi}{3} + K_2\frac{\sin^5\varphi}{5} + \ldots,$$

développement convergent pour toute valeur de φ.

On peut enfin obtenir une autre forme de développement, ordonnée suivant les sinus des multiples de φ. Si l'on pose $k = \sin\theta$, on a

$$1 - k^2\sin^2\varphi = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + \tang^2\frac{\theta}{2}e^{2i\varphi}\right)\left(1 + \tang^2\frac{\theta}{2}e^{-2i\varphi}\right),$$

comme on le voit en développant, et remarquant que

$$1 = \left(\cos^2\frac{\zeta}{2} + \sin^2\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos^2\frac{\zeta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\zeta + \sin^4\frac{\zeta}{2};$$

donc, en posant $\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2} = h$, on aura

$$1 + h^2\sin^2\zeta + \cos^2\frac{\zeta}{2}\left(1 + a_1 h^2 e^{\zeta} + \ldots + a_p h^{2p} e^{2p\zeta} + \ldots\right)$$

$$= 1 + a_1 h^2 e^{\zeta} + \ldots + a_p h^{2p} e^{2p\zeta} + \ldots$$

Faisant $n = -\frac{1}{2}$, et posant, pour abréger,

$$\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]_p,$$

on a

$$\left(1 + h^2 e^{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]_1 h^2 e^{\zeta} + \ldots + \left[\frac{1}{2}\right]_p h^{2p} e^{2p\zeta} + \ldots$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{1 + h^2\sin^2\zeta}} = \frac{1}{\cos\frac{\zeta}{2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]_1 h^2 e^{\zeta} + \ldots + \left[\frac{1}{2}\right]_p h^{2p} e^{2p\zeta} + \ldots\right\}$$

$$= A_0 + A_1\cos 2\zeta + \ldots$$

en posant

$$A_p = \frac{(-1)^p}{\cos\frac{\zeta}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}\right]_p h^{2p} - \left[\frac{1}{2}\right]_{p+1}\left[\frac{1}{2}\right]_p h^{2p+2} + \left[\frac{1}{2}\right]_{p+2}\left[\frac{1}{2}\right]_{p+1} h^{2p+4} - \ldots\right\}.$$

Donc

$$\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1 + h^2\sin^2\zeta}} = A_0\zeta + \frac{1}{2}A_1\sin 2\zeta + \frac{1}{4}A_2\sin 4\zeta + \ldots.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\zeta}{\sqrt{1 + h^2\sin^2\zeta}} = K = A_0\cdot\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\frac{2K}{\pi} = A_0 = \frac{1}{\cos^2\frac{\zeta}{2}}\left\{1 - \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 h^2 + \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 h^4 - \ldots\right\}.$$

On développerait de la même manière l'intégrale elliptique de seconde espèce

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

§ V.

REMARQUES SUR LE PASSAGE DES INTÉGRALES INDÉFINIES AUX INTÉGRALES DÉFINIES.

456. Si $F(x)$ est une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, et que la fonction $f(x)$ ne devienne infinie pour aucune valeur de x comprise entre les limites x_0 et X, nous savons [241] que l'on a

$$(1)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Si, pour X infiniment grand, $F(X)$ tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par $F(\infty)$, on aura

$$\lim_{X=\infty}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X=\infty}[F(X) - F(x_0)] = F(\infty) - F(x_0).$$

Donc la formule (1) subsiste encore dans ce cas.

De même, si $\lim_{x_0=-\infty} F(x_0)$ a une valeur déterminée $F(-\infty)$, on aura

$$\int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(-\infty),$$

et pareillement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Ainsi, toutes les fois que $f(x)$ restera finie entre les deux limites x_0 et X, et que l'intégrale indéfinie $F(x)$ aura, pour ces deux limites, des valeurs déterminées, la formule (1) donnera l'intégrale définie prise entre ces limites x_0 et X.

Exemples. — 1. Pour m positif, on a, en omettant la constante arbitraire, qui doit disparaître lorsqu'on prend la différence

des deux valeurs de l'intégrale indéfinie,

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \text{d'où} \quad \int_{x_0}^{X} x^m dx = \frac{X^{m+1}}{m+1} - \frac{x_0^{m+1}}{m+1}.$$

Pour m négatif et $= -n$, on a, n étant supposé > 1, et x_0 et X de même signe,

$$\int^{X} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right),$$

d'où, pour $X = \infty$,

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)x_0^{n-1}}.$$

Mais, pour $n < 1$, X^{1-n} croît indéfiniment, et par suite, dans ce cas, l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^n}$ a une valeur infinie.

On voit par là que, si m et n sont deux nombres positifs inégaux, et $m > n$, par exemple, et que l'on considère la courbe qui a pour équation $x^m y^n = a$, l'aire asymptotique comprise entre la courbe et l'axe des x,

$$\int_{x_0}^{\infty} y\, dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} dx}{x^{\frac{m}{n}}},$$

aura une valeur finie $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) x_0^{\frac{m}{n}-1}}$, tandis que l'aire asymptotique comprise entre la courbe et l'axe des y,

$$\int_{y_0}^{\infty} x\, dy = \int_{y_0}^{\infty} \frac{a^{\frac{1}{m}} dy}{y^{\frac{n}{m}}},$$

sera infinie.

II. Pour $a > 0$,

$$\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax},$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

III. On a

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a},$$

si l'on fait tendre $\frac{x}{a}$ vers l'infini positif, arc tang $\frac{x}{a}$ tendra vers $+\frac{\pi}{2}$; si $\frac{x}{a}$ tend vers l'infini négatif, arc tang $\frac{x}{a}$ tendra vers $-\frac{\pi}{2}$. On aura donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} - \left(-\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

IV. Nous avons trouvé [285], a étant positif,

$$\int e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx),$$

$$\int e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx);$$

si l'on intègre entre zéro et ∞, il vient

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

V. On a généralement

$$\int_0^X \cos x\, dx = \sin X,$$

d'où, en faisant tendre X vers ∞,

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx = \sin \infty,$$

quantité entièrement indéterminée, mais comprise toujours entre les limites $+1$ et -1.

457. Si $f(x)$ devient infini pour $x = X$, on désignera alors par $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, lorsque sa limite supérieure x tend vers X. Ce sera donc la limite de la différence $F(x) - F(x_0)$, lorsqu'on y fera tendre x vers X.

c'est-à-dire la valeur de $F(X) - F(x_0)$, si $F(X)$ a une valeur déterminée, auquel cas l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ sera aussi déterminée; donc, dans ces conditions, la formule (1) continuera de subsister.

On en peut dire autant pour le cas où $f(x)$ deviendrait infinie pour $x = x_0$.

Ainsi on a

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon = 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon = 0} \left(\arcsin \frac{x}{a}\right)_0^{a-\varepsilon} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon = 0} \arcsin \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon = 0} \arcsin \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a-\varepsilon}$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

458. Si $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = a$, comprise entre x_0 et X, alors on décomposera l'intégrale proposée en deux autres, et l'on aura, par définition,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx$$

$$= \left[\lim_{\varepsilon = 0} F(a - \varepsilon) - F(x_0)\right] + \left[F(X) - \lim_{\varepsilon = 0} F(a + \varepsilon)\right].$$

Si donc $F(a)$ a une valeur finie et déterminée, cette formule se réduira à la formule (1); donc la formule (1) est vraie toutes les fois que $F(x)$ est finie et déterminée pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X, ces limites incluses, quelques discontinuités que présente la dérivée $f(x)$ dans cet intervalle.

En général, δ et ε désignant des infiniment petits, on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{a-\delta} f(x)\,dx + \lim \int_{a+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx$$

$$= F(X) - F(x_0) - \lim [F(a - \delta) - F(a + \varepsilon)],$$

et, si $F(x)$ éprouve une indétermination ou une solution de continuité pour $x = a$, on ne pourra plus dire alors que $F(a - \delta)$ et $F(a + \varepsilon)$ tendent vers la même limite. Aussi l'application de la formule (1) peut-elle conduire, dans ce cas, à des conséquences absurdes.

Considérons, par exemple, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x}$, pour laquelle la formule (1) donne la valeur $\log \frac{X}{x_0}$, qui est la véritable valeur toutes les fois que x_0 et X sont de même signe. Si l'on appliquait cette même formule au cas de $x_0 = -a$, $X = -b$, a et b étant positifs, elle donnerait

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \log \frac{-b}{-a} = \log \frac{b}{a} = \log -1,$$

et, comme le logarithme de -1 n'a que des valeurs imaginaires (371), on arriverait à ce résultat absurde, que la limite d'une somme d'éléments réels aurait une valeur imaginaire. Mais, si l'on décompose l'intervalle de $-a$ à $+b$ en deux intervalles partiels, séparés par la valeur zéro, on aura

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim\left(\int_{-a}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{dx}{x}\right) = \lim\left(\log \frac{\delta}{a} + \log \frac{b}{\varepsilon}\right)$$
$$= \lim\left(\log \frac{b}{a} + \log \frac{\delta}{\varepsilon}\right),$$

quantité entièrement indéterminée, puisque rien ne détermine le rapport $\frac{\delta}{\varepsilon}$.

459. Dans l'application de la formule (1), il faut faire attention aux valeurs multiples dont la fonction $F(x)$ peut être susceptible, et entre lesquelles on doit choisir par des considérations fondées sur la marche de la différentielle $f(x)dx$. Donnons quelques exemples de cette discussion.

I. On trouve, par la formule (1),

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin +1 - \arcsin -1.$$

Les valeurs générales des arcs contenus dans cette expression sont

$$\arcsin(+1) = (4m+1)\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin -1 = -(4n-1)\frac{\pi}{2},$$

m et n étant des nombres entiers quelconques. D'après cela, la valeur de l'intégrale est comprise dans la formule $2m - 2n\pi + \pi$. Pour lever l'indétermination, remarquons que $\frac{x}{a}$, en variant de -1 à $+1$, ne passe qu'une seule fois par chaque valeur, tandis que le radical $\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, qui représente le cosinus de l'arc, est supposé conserver toujours le même signe. Donc l'arc, partant de la valeur $4n - 1\frac{\pi}{2}$, et croissant avec son sinus $\frac{x}{a}$, si le cosinus est positif, devra croître de π et arriver à la valeur $4n - 1\frac{\pi}{2} + \pi$. Donc il faut prendre $m = n$, et l'intégrale a pour valeur π. Si, au contraire, le radical était pris négativement, l'arc décroîtrait lorsque le sinus croît, et passerait de la valeur $4n - 1\frac{\pi}{2}$ à la valeur $4n - 1\frac{\pi}{2} - \pi$; donc alors la valeur de l'intégrale serait $-\pi$.

Ce résultat est le même que celui que l'on obtiendrait en restreignant, comme au n° 280, la notation arc sin x, dans le cas du radical positif, aux arcs compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

II. Soit maintenant l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tang^2 x}.$$

L'intégrale indéfinie correspondante a pour valeur

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tang^2 x} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\tang x\right) + C.$$

Lorsqu'on fait varier x de zéro à π, l'intégrale ayant tous ses éléments positifs, et la fonction $\frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ étant toujours finie et continue, la fonction $F(x) = \frac{1}{ab}\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\tang x\right)$ devra croître d'une manière continue avec x. Or $\frac{b}{a}\tang x$ devient une seule fois infini dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = \pi$; donc $\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\tang x\right)$ passera une seule fois par un multiple impair

de $\frac{\pi}{2}$. On doit donc prendre, pour la différence des valeurs de cette quantité qui correspondent à $x = 0$ et à $x = \pi$, un intervalle qui ne renferme qu'un seul multiple impair du quadrant. Si donc on prend

$$\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\tang 0\right) = n\pi,$$

il faudra prendre

$$\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\tang \pi\right) = n\pi + \pi,$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{ab}.$$

On voit que, dans cet exemple, on ne pourrait plus, comme dans le précédent, restreindre, suivant les indications du n° 280, la notation arc tang x aux seuls arcs compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

III. Considérons enfin l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{a - b\cos x}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}\,dx.$$

On a, pour l'intégrale indéfinie correspondante,

$$\int \frac{a - b\cos x}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}\right)dx,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{a - b\cos x}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} + \frac{a^2 - b^2}{2a}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}.$$

Or on a [452]

$$\int \frac{dx}{g + h\cos x} = \frac{2}{\sqrt{g^2 - h^2}}\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{g - h}{g + h}}\tang\frac{x}{2}\right) + C.$$

En faisant maintenant $g = a^2 - b^2$, $h = 2ab$, on a

$$g = h = a - b, \quad g = h = a + b, \quad \sqrt{g - h} = a - b,$$

et par suite

$$\int \frac{dx}{a - ab\cos x - b^2} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\operatorname{arc\,tang} \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang} \frac{x}{2} \right] + C.$$

Lorsque x varie de zéro à π, $\operatorname{tang} \frac{x}{2}$ varie de zéro à $+\infty$, et par conséquent $\operatorname{arc\,tang} \left(\frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang} \frac{x}{2} \right)$ varie depuis $\operatorname{arc\,tang} 0$ jusqu'à $\operatorname{arc\,tang} +\infty$, ou jusqu'à $\operatorname{arc\,tang} -\infty$, suivant que $\frac{a+b}{a-b}$ et par suite $a^2 - b^2$ seront positifs ou négatifs. Si donc on fait $\operatorname{arc\,tang} 0 = m\pi$, on devra prendre $\operatorname{arc\,tang} +\infty = m\pi + \frac{\pi}{2}$, le signe $+$ correspondant à $a^2 - b^2$ positif, le signe $-$ à $a^2 - b^2$ négatif. Donc, pour $a^2 - b^2 > 0$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a - ab\cos x - b^2} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[m\pi + \frac{\pi}{2} - m\pi \right] = \frac{\pi}{2(a - b)},$$

et pour $a^2 - b^2 < 0$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a - ab\cos x - b^2} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[m\pi - \frac{\pi}{2} - m\pi \right] = \frac{\pi}{2(a - b)}.$$

Donc, pour $a^2 - b^2 > 0$, l'intégrale proposée a pour valeur $\frac{\pi}{a}$, pour $a^2 - b^2 < 0$, elle a pour valeur zéro.

On conçoit, en effet, dans le premier cas, que $a - b\cos x$ est toujours de même signe que a, et qu'il en doit être de même de tous les éléments de l'intégrale; donc, dans ce cas, l'intégrale doit avoir une valeur différente de zéro et de même signe que a. Dans le second cas, $a - b\cos x$ change de signe, et rien n'empêche que les éléments de signe contraire ne se détruisent.

Pour $b = a$, on a

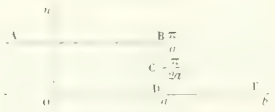
$$\int_0^{2\pi} \frac{a(1 - \cos x)\,dx}{2a^2(1 - \cos x)} = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} dx = \frac{\pi}{2a}.$$

La comparaison de ces trois cas montre que (*fig.* 26), si l'on fait varier b d'une manière continue depuis une valeur moindre que a jusqu'à une valeur plus grande que a, l'intégrale

$$u = \int_0^{\pi} \frac{a - b\cos x}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}\,dx$$

prendra, pour $b = a - h$, a, $a + h$, les valeurs $\frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{2a}$, 0. Ce sera donc une fonction discontinue de b. Si l'on prend b pour abscisse

Fig. 26.



et la valeur de u pour ordonnée, la courbe qui représente cette fonction se composera des deux portions de droite, indéfinies dans un seul sens, BA et DE, et du point isolé C.

460. Si $f(x)$ est une fonction paire de x [288], et que l'on intègre cette fonction entre deux limites égales et de signe contraire $-a$ et $+a$, on a

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{a}^{0} f(x')\,dx' + \int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

en posant $x' = -x$, ou enfin

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

On peut arriver à cette formule, en remarquant que, la courbe $y = f(x)$ étant symétrique par rapport à l'axe des y, les aires des deux parties comprises entre cet axe et les ordonnées correspondantes à $x = \pm a$ sont égales.

On a ainsi

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi,$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}, \text{ ou } \operatorname{tang} \frac{\pi}{a},$$

$$\int_{-x}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^2}} = 2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^2}} = \pi.$$

461. Si $f(x)$ est une fonction *impaire* de x, de sorte que $f(-x) = -f(x)$, on verrait de même que, en posant $x' = -x$,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_a^0 f(x')\,dx' + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

On a, de cette manière,

$$\int_{-a}^{+a} \sin(x^2)\,dx = 0, \quad \int_{-x}^{+x} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - x^2}} = 0.$$

462. Si l'on a $f(2a - x) = f(x)$, en faisant alors $x = a - y$, il vient $f(a + y) = f(a - y)$, et par suite $f(a + y)$ est une fonction paire de y. On a donc alors

$$\int_{-b}^{+b} f(x + a)\,dx = 2\int_0^b f(a + y)\,dy,$$

c'est-à-dire

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_a^{a+b} f(x)\,dx.$$

Pour $b = 2a$, cette formule devient, en posant $x = z$,

$$\int_0^{4a} f(x)\,dx = 2\int_a^{3a} f(x)\,dx = \int_a^{3a} f(x)\,dx + \int_a^{3a} f(2a - x)\,dx$$

$$= \int_a^{3a} f(x)\,dx + \int_a^{3a} f(x)\,dx = 2\int_a^{3a} f(x)\,dx.$$

Ainsi, de la relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ on tire

$$f[\sin(\pi - x)] = f(\sin x),$$

d'où

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx,$$

et, en particulier,

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx.$$

463. Si l'on a $f(2a - x) = -f(x)$, ou, en posant $x = a - y$, $f(a + y) = -f(a - y)$, on trouvera de même

$$\int_{-b}^{+b} f(a + y)\,dy = \int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 0,$$

et, en particulier,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

Ainsi, f désignant une fonction *impaire*, on a

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx = 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos^{2k+1} x\,dx = 0.$$

464. Les formules de réduction successive des intégrales peuvent souvent se simplifier pour certaines valeurs des limites de ces intégrales. Ainsi, de la formule (3) du n° 443,

$$(m+n)\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx,$$

on tire, en supposant $m > 1$ et $n > 1$ positifs,

$$(m+n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx.$$

Si l'on suppose $n = 0$, et que l'on fasse $A_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, on

aura

$$A_m = \frac{m-1}{m} A_{m-2}, \quad A_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} A_{m-4}, \quad \ldots,$$

ce qui nous ramène, pour m impair, à $A_1 = 1$, et, pour m pair, à $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(2k)}{1.3.5\ldots(2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{\pi}{2}.$$

465. On peut, sans avoir besoin de calculer une intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, obtenir des limites entre lesquelles sa valeur est comprise.

Soient $\varphi(x)$, $\chi(x)$ deux fonctions que l'on sache intégrer, et telles que l'on ait constamment, pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X,

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \chi(x).$$

Les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\chi(x)\,dx,$$

dont la première a tous ses éléments positifs, la seconde tous ses éléments négatifs, seront l'une positive, l'autre négative. On aura donc la double inégalité

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqslant \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx.$$

Exemples. — I. On a, pour $k < 1$ et $\varphi < \frac{\pi}{2}$,

$$1 - k\sin\varphi \leqslant \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \leqslant 1,$$

et aussi

$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \leqslant 1 - k^2\sin^2\varphi.$$

donc

$$\varphi < \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} < \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

et aussi

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} < \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1 - k^2} . \operatorname{tang}\varphi\right).$$

En particulier,

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1 - k^2}}.$$

II. De même,

$$\varphi > \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} > \int_0^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = \sin\varphi,$$

et aussi

$$\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} > \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2\varphi) \, d\varphi = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\varphi - \frac{k^2}{4} \sin 2\varphi.$$

En particulier,

$$\frac{\pi}{2} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} > \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

III. Pour m positif et x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin^{2m+1} x > \sin^{2m+2} x > \sin^{2m+3} x;$$

donc l'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{1.3.5\ldots 2m}{2.4.6\ldots 2m} \frac{\pi}{2}$$

est comprise entre les deux intégrales

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots 2m+1},$$

$$(3) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+3} x \, dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots 2m+1}.$$

Le rapport $\frac{2m}{2m+1}$ de ces deux dernières intégrales a pour limite l'unité, lorsque m croît indéfiniment ; donc, à plus forte raison, le rapport de (1) à (3) a pour limite l'unité, d'où l'on tire la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2m.2m}{1.3.3.5.5.7\ldots 2m-1.2m+1}.$$

166. Une fonction $f(x)$ devenant infiniment petite pour x infiniment grand, proposons-nous de reconnaître si l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a ou non une valeur finie.

Pour cela, soit n l'ordre infinitésimal de $f(x)$, en prenant $\frac{1}{x}$ pour base des infiniment petits, de sorte que l'on ait (**184**)

$$\lim \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = 0, \quad \lim \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}} = \infty.$$

Supposons que $\lim \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ ait une valeur finie, et que l'on ait toujours, pour $a < x < \infty$,

$$m < x^n f(x) < M, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{x^n} < f(x) < \frac{M}{x^n}.$$

Alors, d'après le numéro précédent, on a, pour $X > a$,

$$\int_a^X \frac{m\,dx}{x^n} < \int_a^X f(x)\,dx < \int_a^X \frac{M\,dx}{x^n};$$

donc la valeur de $\int_{a_0}^X f(x)\,dx$ est comprise entre

$$\frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{M}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right).$$

Si n est < 1, ces deux limites sont infinies en même temps que X. Mais, si n est > 1, ces deux limites sont finies pour $X = \infty$; donc l'intégrale proposée $\int_a^\infty f(x)\,dx$ est infinie pour $n < 1$, finie pour $n > 1$.

Pour $n = 1$, les deux intégrales de comparaison deviennent

$$m \log \frac{X}{a} \quad \text{et} \quad M \log \frac{X}{a},$$

et sont infinies pour $X = \infty$; donc alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ est infinie.

Si $\frac{f(x)}{x^{-n}}$ avait une limite infinie ou nulle, on serait dans un cas douteux, et l'on chercherait alors à lever l'indétermination, en introduisant [187] des infiniment petits d'ordres logarithmiques.

On voit l'application immédiate de cette règle à l'évaluation des aires asymptotiques des courbes [456, I].

467. Lorsqu'une fonction $f(x)$ devient infinie entre les limites x_0 et X, nous avons vu [458] que cette intégrale peut dépendre du rapport indéterminé de deux infiniment petits. Il y a des cas où l'intégrale est indépendante de ce rapport, et où, par suite, sa valeur est complétement déterminée.

En omettant, pour abréger, la différentielle $f(x)\,dx$, nous avons défini l'intégrale $\int_{x_0}^{X}$ comme la limite (si elle existe) de la somme des deux intégrales $\int_{x_0}^{a-\delta}$ et $\int_{a+\varepsilon}^{X}$, a étant la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est infinie. Voyons à quelles conditions cette quantité peut être indépendante du rapport $\frac{\delta}{\varepsilon}$ des infiniment petits δ, ε. Cette somme peut s'écrire

$$\int_{x_0}^{a-\gamma} + \int_{a-\gamma}^{a-\delta} + \int_{a+\varepsilon}^{a+\gamma} + \int_{a+\gamma}^{X},$$

γ étant un nombre infiniment petit. La partie

$$\int_{x_0}^{a-\gamma} + \int_{a+\gamma}^{X},$$

qui ne dépend que de la seule variable γ, a généralement une limite déterminée, que Cauchy appelle la *valeur principale* de l'intégrale proposée. Il s'agit de savoir si l'autre partie, celle d'où provient l'indétermination, et que Cauchy désigne sous le nom d'*intégrale*

singulière, savoir, la somme

$$\int_{a-\zeta}^{a-\delta} f(x)\,dx + \int_{a+\delta}^{a+\zeta} f(x)\,dx,$$

a une limite nulle ou différente de zéro.

D'après la formule démontrée au n° 283, V, si a est une quantité prise *en dehors* des limites A et B de l'intégration, et ξ une moyenne convenablement choisie *entre* ces mêmes limites, on a

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B (x-a) f(x) \cdot \frac{dx}{x-a} = (\xi - a) f(\xi) \log \frac{B-a}{A-a}.$$

En faisant $A = a + \zeta$, $B = a - \delta$, $\lim (x-a) f(x) = \mathfrak{f}$, on aura donc

$$\lim \int_{a+\delta}^{a-\delta} f(x)\,dx = \mathfrak{f} . \lim \log \frac{\delta}{\zeta}.$$

la quantité $\mathfrak{f}$ étant la limite vers laquelle tend $(x-a) f(x)$, lorsque x s'approche de a en passant par des valeurs *inférieures* à a. De même, si $\mathfrak{f}'$ est la limite de $(x-a) f(x)$ pour des valeurs de x *supérieures* à a, on aura

$$\lim \int_{a+\delta}^{a+\zeta} f(x)\,dx = \mathfrak{f}' . \lim \log \frac{\zeta}{\delta};$$

donc la partie qui contient l'indétermination se trouvera mise sous la forme

$$\mathfrak{f} . \lim \log \frac{\delta}{\zeta} + \mathfrak{f}' . \lim \log \frac{\zeta}{\delta};$$

ou plus simplement, lorsque $\mathfrak{f}'$ sera égal à $\mathfrak{f}$,

$$\mathfrak{f} . \lim \log \frac{\delta}{\zeta}.$$

Si $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ sont nuls, ce qui arrive lorsque $f(a \pm \zeta)$ est infiniment grand d'ordre moindre que l'unité par rapport à ζ pris pour base des infiniment petits, alors l'indétermination disparaîtra, et $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ aura une valeur déterminée. Dans le cas contraire, l'intégrale sera indéterminée.

468. On peut, de même, se proposer de reconnaître si l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ a ou non une valeur déterminée, lorsqu'une de ses limites ou toutes les deux deviennent infinies, et qu'en même temps la fonction $f(x)$ devient infiniment petite; on complétera ainsi les considérations du n° 466.

Si la limite inférieure x_0 devient $-\infty$, l'intégrale $\int_{x_0}^{X}$ sera la limite vers laquelle tend l'expression $\int_{\frac{1}{\delta}}^{X}$, δ étant un infiniment petit positif. Si X aussi devient infini, l'intégrale sera la limite de $\int_{-\frac{1}{\delta}}^{+\frac{1}{\varepsilon}}$, ε étant un autre infiniment petit positif. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ pourra s'écrire sous la forme

$$\lim\left(\int_{-\frac{1}{\delta}}^{-\frac{1}{\gamma}} + \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\frac{1}{\gamma}} + \int_{+\frac{1}{\gamma}}^{+\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

γ étant encore un infiniment petit positif. La partie $\int_{-\frac{1}{\gamma}}^{+\frac{1}{\gamma}}$, dépendante de la seule variable γ, aura généralement une limite déterminée. Il faut voir maintenant si la partie restante

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{-\frac{1}{\gamma}} + \int_{+\frac{1}{\gamma}}^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

aura ou non une limite nulle.

Si les limites A et B sont de même signe, on aura [283, VI]

$$\int_{A}^{B} f(x)\,dx = \int_{A}^{B} xf(x)\cdot\frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\log\frac{B}{A};$$

d'où l'on conclut, en posant $\lim_{x=\gamma} xf(x) = F$, $\lim_{x=-\gamma} xf(x) = F'$,

$$\lim_{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\gamma} f(x)\,dx = F.\lim \log \frac{\delta}{\gamma}, \quad \lim_{\varepsilon} \int_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x)\,dx = F'.\lim \log \frac{\gamma}{\varepsilon},$$

donc la partie qui contient l'indétermination se trouvera mise sous la forme

$$F.\lim \log \frac{\delta}{\gamma} + F'.\lim \log \frac{\gamma}{\varepsilon},$$

qui devient, pour $F' = -F$,

$$F.\lim \log \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Si F et F′ sont nuls, l'intégrale, prise entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, sera généralement déterminée; sinon elle sera indéterminée.

469. *Exemples.* — 1. Soit l'intégrale $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, où la différentielle devient infinie pour $x = \pm a$. Cette intégrale est la limite de $\int_{-a+\delta}^{+a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, pour δ et ε infiniment petits positifs. Or on a

$$\int_{-a+\delta}^{+a-\varepsilon} = \int_{-a+\delta}^{-a+\gamma} + \int_{-a+\gamma}^{+a-\gamma} + \int_{+a-\gamma}^{+a-\varepsilon}.$$

L'intégrale

$$\int_{-a+\gamma}^{+a-\gamma} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) - \arcsin\left(-1 + \frac{\gamma}{a}\right)$$

a une limite déterminée π. On a ensuite

$$\lim_{x=-a} \frac{x+a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{x=-a} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} = 0,$$

et de même

$$\lim_{x=+a} \frac{x-a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0.$$

Donc la partie qui contiendrait l'indétermination disparaît.

Nous avons vu [458] qu'il n'en est plus ainsi pour l'intégrale $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$.

II. Considérons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

L'intégrale prise entre les limites zéro et $\frac{1}{\gamma}$ a pour expression $\frac{1}{a}$ arc tang $\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, et sa valeur limite est $\frac{\pi}{2a}$. Ensuite, la valeur limite de $x \frac{1}{x^2 + a^2}$, pour $x = \infty$, est nulle. Donc la partie indéterminée disparaît.

III. Au contraire, si l'on donne l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + a^2}$, la partie prise entre les limites $-\frac{1}{\gamma}$ et $+\frac{1}{\gamma}$ aura pour limite zéro [461]. Mais l'expression $xf(x) = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$ ne tend pas vers zéro pour x infini, et, par conséquent, l'indétermination subsiste.

IV. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux polynômes, dont le second $\varphi(x)$, égalé à zéro, n'ait aucune racine réelle, et supposons le degré de $f(x)$ moindre que celui de $\varphi(x)$. On pourra mettre [417] la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sous la forme

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2A(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{2Bb}{(x-a)^2 + b^2} + \ldots.$$

Or, pour $x = \pm\infty$,

$$\lim\left[x \cdot \frac{2A(x-a)}{(x-a)^2 + b^2}\right] = 2A, \quad \lim\left[x \cdot \frac{2Bb}{(x-a)^2 + b^2}\right] = 0.$$

On en conclut que l'intégrale

$$\int_{-}^{+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

a pour valeur

$$2(A + A' + \ldots) \lim \log \frac{\varphi}{\varepsilon} + 2\pi(B + B' + \ldots).$$

Si la différence des degrés de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ est plus grande que l'unité, on voit alors aisément, en identifiant les deux membres de (1), que la somme des coefficients A, A', ... est nulle. Donc dans ce cas, et dans ce cas seulement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ a une valeur déterminée, égale à $2\pi(B + B' + \ldots)$.

§ VI.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$. — INTÉGRALES DOUBLES; INTÉGRALES MULTIPLES.

470. Soit $f(x, \alpha)$ une fonction des deux variables indépendantes x et α. L'intégrale définie

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$$

sera une fonction de α et des deux limites x_0 et X, ces trois variables pouvant être d'ailleurs ou indépendantes ou liées entre elles d'une manière quelconque. Donc la différentielle totale de cette intégrale aura pour expression

$$du = \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial X} dX.$$

Calculons les trois termes de cette différentielle.

Si l'on représente la fonction $f(x, \alpha)$ par l'ordonnée d'une

Fig. 7.

courbe BD (*fig.* 27), u représentera l'aire de cette courbe com-

prise entre les ordonnées AC, BD qui répondent aux abscisses x_0 et X. Si α se change en $\alpha + d\alpha$, la fonction $f(x, \alpha)$ croîtra de $d_\alpha f(x, \alpha) = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$, et, par suite, l'aire de la courbe croîtra de la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx,$$

qui est la mesure du segment infiniment mince BFHD. Si x_0 devient $x_0 + dx_0$, l'aire sera diminuée du trapèze infiniment petit ABEA′, qui a pour dimensions $AA' = dx_0$ et $AB = f(x_0, \alpha)$; donc

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 = -f(x_0, \alpha) dx_0.$$

Enfin, si X croît de $CC' = dX$, on verra de même que l'aire croîtra de

$$\frac{\partial u}{\partial X} dX = f(X, \alpha) dX.$$

Donc l'accroissement total de l'aire est, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$du = d\alpha \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(x_0, \alpha) dx_0 + f(X, \alpha) dX,$$

et sa dérivée par rapport à α a pour valeur

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(x_0, \alpha) \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + f(X, \alpha) \frac{\partial X}{\partial \alpha}.$$

Si les limites x_0, X sont indépendantes de α, alors l'expression se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx,$$

c'est-à-dire que, pour différentier l'intégrale u par rapport au paramètre α, il suffit de différentier par rapport à ce paramètre la quantité sous le signe $\int$.

Il faut remarquer que cette formule n'est applicable que dans le cas où la fonction $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ jouit, comme la fonction $f(x, \alpha)$, de

la propriété de ne devenir infinie pour aucune valeur de x comprise entre les limites x_0 et X, et pour la valeur de α que l'on considère, ou du moins lorsque l'intégrale indéfinie $\int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ est finie et continue pour toutes les valeurs considérées de x et de α. Dans le cas contraire, on devra discuter la valeur de l'intégrale, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent.

471. Une intégrale indéfinie $u = \int f(x, \alpha) dx$ peut se mettre sous la forme

$$u = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha) dx + C,$$

C étant une constante arbitraire. On a donc, d'après ce qui précède, la limite supérieure x étant supposée indépendante de α,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(x, \alpha) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + C',$$

C′ désignant une quantité indépendante de x, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Donc la règle de la différentiation sous le signe $\int$ s'applique aussi à une intégrale indéfinie, dans tout l'intervalle des valeurs de x et de α pour lequel la fonction $f(x, \alpha)$ et sa dérivée par rapport à α ne deviennent pas infinies.

472. Considérons l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha) dx = u$, prise entre des limites x_0, X, indépendantes du paramètre α. Si l'on désigne par $F(x, \alpha)$ la fonction dont la dérivée par rapport à α est $f(x, \alpha)$, alors, d'après le numéro précédent, u sera la dérivée par rapport à α de la fonction

$$\int u d\alpha = \int_{x_0}^{X} F(x, \alpha) dx.$$

On aura donc

$$\int u d\alpha = \int d\alpha \left[\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha) dx \right] = \int_{x_0}^{X} dx \left[\int f(x, \alpha) d\alpha \right].$$

ce que l'on écrit plus simplement, en supprimant les crochets et convenant que chaque signe $\int$ porte sur tout ce qui le suit, considéré comme un résultat d'opérations effectuées,

$$\int d\alpha \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Si l'on pose maintenant $\int f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha + C$, C étant une quantité indépendante de α, on aura, C′ étant une autre quantité indépendante de α,

$$\int u\, d\alpha = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha + \int_{x_0}^{X} C\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha + C'.$$

En supposant $C = 0$, et par suite $C' = 0$, l'intégrale $\int u\, d\alpha$ se réduira à l'intégrale définie $\int_{\alpha_0}^{\alpha} u\, d\alpha$. On aura donc

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

On voit donc que, si x et α sont deux variables indépendantes, et x_0, X et α_0, α deux systèmes de quantités indépendants le premier de α, le second de x; et si l'on intègre successivement la fonction $f(x, \alpha)$ par rapport à x entre les limites x_0, X, puis par rapport à α entre les limites α_0 et α, la valeur de l'*intégrale double* ainsi obtenue est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue ces deux intégrations.

C'est dans ce théorème que consiste la règle de l'intégration sous le signe $\int$, dont nous allons montrer l'interprétation géométrique.

473. Soit (*fig.* 28) une surface représentée par l'équation

Fig. 28.

$z = f(x, y)$. On veut trouver un volume polyédral, par exemple

un parallélépipède rectangle, *équivalent* au volume compris entre la surface et le plan des xy d'une part, entre le plan des zx et le plan $y = b$ d'autre part, et enfin entre le plan des zy et le plan $x = a$.

Partageons le volume en tranches infiniment minces par des plans parallèles au plan des zx et correspondants à des valeurs constantes de y. L'aire de la section formée par un de ces plans est [236]

$$\lambda = \int_0^a z\,dx.$$

Cette aire est une fonction de la coordonnée y de la section. Le volume de la tranche comprise entre les plans menés aux distances y et $y + dy$ de l'origine diffère infiniment peu de celui d'un cylindre de base λ et de hauteur dy. On a donc, pour le volume cherché, $V = \int_0^b \lambda\,dy$, ou, en mettant pour λ sa valeur,

$$V = \int_0^b dy \int_0^a z\,dx,$$

chaque signe d'intégration portant *sur tout ce qui le suit,* considéré comme résultat d'un calcul effectué.

On aurait pu faire la sommation dans un autre ordre, en divisant le volume en tranches infiniment minces par des plans parallèles au plan des zy. On aurait trouvé de cette manière, pour l'aire de la section, $\lambda' = \int_0^a z\,dy$, et pour le volume total,

$$V = \int_0^a dx \int_0^b z\,dy = \int_0^b dy \int_0^a z\,dx.$$

Si les limites inférieures, au lieu d'être $x = 0$, $y = 0$, étaient des plans quelconques parallèles à ceux des zy et des zx, et que le volume fût compris entre les deux surfaces $z = f(x, y)$, $Z = F(x, y)$, on verrait de la même manière que la mesure de ce volume serait donnée par l'une ou l'autre des expressions

$$V = \int_b^Y dy \int_a^X (Z - z)\,dx, \quad V = \int_a^X dx \int_b^Y (Z - z)\,dy.$$

On voit, par l'identité des valeurs de ces deux expressions, que, lorsqu'une double intégration doit s'effectuer par rapport à deux variables indépendantes entre des limites constantes, c'est-à-dire, lorsque les limites des valeurs de chaque variable sont indépendantes de l'autre variable, on ne change pas la valeur de l'intégrale double en intervertissant l'ordre des intégrations : ce que nous avions démontré par d'autres considérations au numéro précédent.

474. Supposons maintenant qu'au lieu d'un plan $y = Y$, parallèle au plan des zx, on prenne pour limite du volume, dans le sens des y, un cylindre parallèle à l'axe des z, et ayant pour équation

$$y = \varphi(x).$$

Si l'on décompose le volume en tranches infiniment minces par des plans parallèles au plan des zy, on a, pour l'aire d'une section,

$$\int_{y_0}^{y} z\,dy = \int_{y_0}^{\varphi(x)} z\,dy,$$

la limite supérieure n'étant plus ici une constante, mais une fonction de x. On a ensuite

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{\varphi(x)} z\,dy.$$

Plus généralement, si l'on demande le volume compris

1° entre les deux surfaces $z = f(x, y)$, $Z = F(x, y)$,
2° entre les deux cylindres $y = \varphi(x)$, $Y = \Phi(x)$,
3° entre les deux plans $x = x_0$, $x = X$,

on trouvera de même

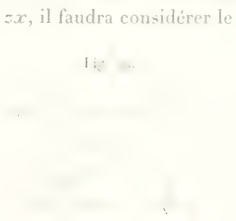
$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y}^{Y} (Z - z)\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} [F(x, y) - f(x, y)]\,dy.$$

On ne peut plus ici intervertir simplement l'ordre des intégrations, comme dans le cas où les limites sont constantes et correspondent à des plans. Supposons, par exemple (*fig.* 29) que les limites soient, dans le sens des y, $y = 0$ et $y = \Phi(x)$. On aurait,

d'après ce qu'on vient de voir, en commençant par intégrer relativement à y,

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y = \Phi(X)} z\,dy.$$

Si l'on veut commencer par l'intégration relative à x, en décomposant d'abord le volume en tranches infiniment minces, parallèlement au plan des zx, il faudra considérer le volume qui a pour



base le quadrilatère curviligne ABFE comme la différence entre les volumes qui ont pour bases les aires ABFG et EFG. Pour obtenir le premier de ces volumes, on fera varier x depuis x_0 jusqu'à X, puis y depuis zéro jusqu'à $Y = \Phi(X)$, d'où

$$\text{vol. ABFE} = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} z\,dx.$$

Pour avoir l'autre volume, il faut calculer d'abord l'aire de la section parallèle au plan des zx, et comprise entre le plan AEG et la courbe $y = \Phi(x)$. On intégrera depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \chi(y)$, $\chi(y)$ désignant la valeur de x obtenue en résolvant l'équation $y = \Phi(x)$ par rapport à x. Ensuite on fera la somme des tranches entre $y = \text{OG} = y_0 = \Phi(x_0)$ et $y = \text{OD} = Y = \Phi(X)$, ce qui donnera

$$\text{vol. EGF} = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{\chi(y)} z\,dx.$$

Donc enfin l'expression du volume cherché V sera

$$V = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x}^{X} z\,dx - \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{\chi(y)} z\,dx.$$

et l'on voit qu'elle différera par la forme de celle que nous avions obtenue en faisant les intégrations dans un autre ordre.

475. Supposons que, au lieu du volume compris entre la surface $z = f(x, y)$, le plan des xy, et quatre plans parallèles, les uns au plan des zx, les autres au plan des zy, on cherche la masse d'un corps hétérogène compris entre les mêmes limites, et dont la densité ρ soit une fonction continue des trois coordonnées x, y, z. On décomposera, comme précédemment, le volume en tranches infiniment minces, parallèles au plan des zy et d'épaisseur dx; puis chaque tranche, par des plans parallèles au plan des zx, en prismes infiniment minces, de base $dx\,dy$ et de hauteur z; et enfin, chacun de ces prismes, par des plans parallèles au plan des xy, en parallélépipèdes infiniment petits du troisième ordre, de volume $dx\,dy\,dz$.

Si le corps était homogène, la masse de l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ serait $\rho\,dx\,dy\,dz$. Comme ρ ne peut varier dans l'étendue de cet élément que d'une quantité infiniment petite, l'expression précédente donnera la masse de l'élément à une fraction près d'elle-même infiniment petite, de sorte qu'on pourra [195], sans altérer la limite de la somme des éléments de masse, prendre cette expression pour l'élément qui correspond au point (x, y, z). On n'altérera pareillement que d'une fraction de lui-même infiniment petite le prisme infinitésimal de hauteur z et de base $dx\,dy$, en négligeant la portion du corps comprise entre la surface et le dernier parallélépipède $dx\,dy\,dz$ contenu dans l'intérieur du prisme; donc la masse du prisme sera exprimée par l'intégrale

$$\int_0^z \rho\,dx\,dy\,dz = dx\,dy \int_0^{f(x,y)} \rho\,dz,$$

l'intégrale étant prise en ne faisant varier dans ρ que la seule coordonnée z.

Le résultat est une fonction de x et de y. Pour avoir la masse de la tranche d'épaisseur dx, on fera la somme des masses des prismes, en intégrant cette expression par rapport à y, et laissant x constant, et l'on aura ainsi l'intégrale double

$$dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_0^{f(x,y)} \rho\,dz.$$

Enfin, en faisant la somme de ces tranches, on aura, pour l'expression de la masse totale du corps, l'*intégrale triple*

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{f(x,y)} z\,dz.$$

Dans cette intégrale, les limites de x étant supposées indépendantes de y, et celles de y indépendantes de x, on pourra intervertir l'ordre des intégrations relativement à x et à y. Si la limite variable $f(x, y)$ de z était remplacée par une quantité indépendante de x et de y, on pourrait alors intervertir l'ordre des trois intégrations d'une manière quelconque.

476. Il est maintenant facile de voir ce qu'il faut entendre par une intégrale *multiple*

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \ldots \int_{u_0}^{U} du \int_{t_0}^{T} dt\, f(x, y, \ldots, u, t),$$

où $f(x, y, \ldots, u, t)$ représente une fonction continue des variables indépendantes, en nombre quelconque, $x, y, \ldots, u, t$, pour tous les systèmes de valeurs de ces variables compris entre les limites entre lesquelles elles peuvent respectivement varier, et où l'on suppose, de plus, les limites de chaque variable indépendante des variables *suivantes*, mais pouvant dépendre des variables *précédentes*.

Pour calculer l'expression (1), on intégrera d'abord la fonction $f(x, y, \ldots, u, t)$ par rapport à t, entre les limites t_0 et T, comme si les variables précédentes $x, y, \ldots, u$ étaient des constantes; on obtiendra de cette manière une fonction des variables $x, y, \ldots, u$. On intégrera cette fonction par rapport à u, entre les limites u_0 et U, comme si $x, y, \ldots$ étaient des constantes, et l'on obtiendra une fonction de $x, y, \ldots$ indépendante de u et de t, et ainsi de suite.

Si les limites relatives à chaque variable étaient indépendantes des autres variables, on pourrait, comme dans le cas de deux variables, intervertir l'ordre des intégrations d'une manière quelconque; de sorte que les intégrations par rapport à des variables indépendantes et entre des limites constantes sont des opérations

jouissant de la propriété commutative, ainsi que de la propriété associative.

On représente souvent une intégrale multiple, sans indiquer les limites, par la relation

$$\int\int\int \ldots f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

Mais, si les limites ne doivent pas être toutes constantes, il faudra avoir égard à la remarque que nous avons faite sur l'ordre des intégrations.

§ VII.

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES MULTIPLES.

477. *Changement de variables dans une intégrale double.* — Étant donnée une intégrale double $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, dans laquelle x et y peuvent varier dans une certaine étendue, considérons x et y comme les coordonnées d'un point du plan; $f(x, y)$ comme une ordonnée perpendiculaire à ce plan, élevée au point (x, y). L'intégrale double représentera la limite d'une somme de prismes infinitésimaux ayant pour bases les divers éléments $dx\, dy$ de la portion de plan déterminée par les limites de l'intégrale, et pour hauteurs les valeurs correspondantes de $f(x, y)$. C'est donc le volume compris entre le plan des xy, la surface $z = f(x, y)$ et le cylindre qui a pour base la portion de plan en question.

Supposons maintenant qu'au lieu des coordonnées rectangulaires on introduise un autre système de coordonnées u, v. On pourra partager la base du volume en éléments infiniment petits

Fig. 30.

par deux séries de courbes ayant pour équations, les unes $u =$ const., les autres $v =$ const. Calculons l'expression d'un de ces éléments infiniment petits; il ne restera plus qu'à la multiplier

par la valeur de z exprimée au moyen des nouvelles variables, et à faire la somme des nouveaux prismes élémentaires.

Soient (*fig.* 30) $x = \varphi(u, v)$, $y = \chi(u, v)$ les équations qui lient les nouvelles variables aux anciennes. Considérons le parallélogramme infinitésimal compris entre les lignes $u = C$, $u = C + du$ d'une part, et entre les lignes $v = C'$, $v = C' + dv$ d'autre part. En désignant par (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des sommets $A(u, v)$, $A_1(u + du, v)$, $A_2(u, v + dv)$, l'aire du parallélogramme, double du triangle AA_1A_2, sera [**126**]

$$d\omega = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}.$$

Or on a

$$x_1 - x = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du, \quad y_1 - y = \frac{\partial \chi}{\partial u} du, \quad x_2 - x = \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \quad y_2 - y = \frac{\partial \chi}{\partial v} dv.$$

Donc

$$d\omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv = \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(u, v)} du\,dv,$$

et, si $F(u, v)$ est l'expression de $f(x, y)$ au moyen des nouvelles coordonnées, l'intégrale double deviendra

$$\int\int F(u, v) \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(u, v)} du\,dv.$$

On déterminera les limites des intégrations d'après la forme du contour de la base.

Si l'on prend, par exemple, pour nouvelles variables x et $t = \frac{y}{x}$, on aura alors $x = \varphi(x, t) = x$, $y = \chi(x, t) = tx$. La valeur du déterminant sera

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & x \end{vmatrix} = x,$$

et, par suite, l'intégrale double deviendra

$$\int\int f(x, tx)\, x\, dx\, dt.$$

Si l'on pose $x = r\cos p$, $y = r\sin p$, le déterminant sera

$$\begin{vmatrix} \cos p & \sin p \\ -r\sin p & r\cos p \end{vmatrix} = r,$$

et, par suite, l'intégrale double prendra la forme

$$\iiint f(r\cos p,\ r\sin p)\,r\,dr\,dp.$$

478. *Changement de variables dans les intégrales multiples.* — Soit T une fonction des variables indépendantes $y_1, \ldots, y_n$, et considérons l'intégrale multiple

$$V = \int\int\ldots\int T\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n,$$

prise entre des limites quelconques. Supposons qu'aux variables indépendantes $y_1, \ldots, y_n$ on veuille substituer d'autres variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, liées aux premières par n relations données

$$\left.\begin{array}{l} y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \\ \text{ou} \quad F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0, \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Commençons par transformer ces relations comme au n° **316**, en leur donnant la forme

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(y_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n). \end{array}\right.$$

Pour intégrer l'élément $T\,dy_1 \ldots dy_n$, il faut faire varier y_n, en laissant $y_1, \ldots, y_{n-1}$ constantes; donc, dans la valeur de y_n donnée par la dernière équation (1), x_n devra seule varier, et l'on aura

$$dy_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\,dx_n.$$

L'élément prendra alors la forme

$$dV = T\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\,dy_1 \ldots dy_{n-1}\,dx_n.$$

Il faudra ensuite faire varier y_{n-1}, en laissant $y_1, \ldots, y_{n-2}$, y_n, et par suite aussi x_n constantes, ce qui donnera

$$dy_{n-1} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1},$$

et l'élément deviendra ainsi

$$dV = T\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial t_n}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n.$$

En continuant ainsi, on finira par mettre l'élément dV sous la forme

$$dV = T\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial t_n}\,dt_1\cdots dt_n,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (9) du n° 346,

$$dV = T\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_n)}\,dt_1\cdots dt_n.$$

Il ne restera plus qu'à intégrer cette expression par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, entre des limites dont la détermination dépendra des limites primitives et du mode de liaison des deux systèmes de variables.

479. *Exemples.* — I. Soit proposé de substituer aux variables x, y, z les variables p, q, r, liées aux premières par les relations

$$x = r\cos p\cos q,\quad y = r\sin p\cos q,\quad z = r\sin q.$$

Le déterminant fonctionnel devient ici

$$\begin{vmatrix} \cos p\cos q & -r\sin p\sin q & \sin q \\ r\sin p\cos q & r\cos p\cos q & 0 \\ -\cos p\sin q & -r\sin p\sin q & r\cos q \end{vmatrix} = r^2\cos q,$$

et par suite

$$T\,dx\,dy\,dz = T\,r^2\cos q\,dr\,dp\,dq.$$

II. Si l'on cherche le volume d'une surface de révolution, alors $T = 1$, et l'on peut commencer par intégrer relativement à p, entre les limites zéro et 2π, ce qui donne

$$V = 2\pi\iint r^2\cos q\,dr\,dq.$$

Soit maintenant $\rho = f(z)$ l'équation de la courbe méridienne dans son plan. Transformons l'intégrale de manière à introduire ρ et z. On a

$$r = \rho\sec q,\quad z = \rho\tang q,$$

d'où l'on tire

$$r\,dr = \rho\,d\rho + z\,dz, \quad \frac{dq}{\cos^2 q} = \frac{z\,d\rho + \rho\,dz}{\rho^2};$$

donc le déterminant fonctionnel sera

$$\begin{vmatrix} \cos^2 q & \rho & z \\ r\rho^2 & z & \rho \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 q\,(\rho^2 + z^2)}{r\rho^2} = 1,$$

et par suite

$$V = 2\pi \int\int \rho\,d\rho\,dz,$$

ou enfin, en intégrant par rapport à ρ, de zéro à ρ,

$$V = \pi \int \rho^2 dz,$$

formule que nous établirons plus tard directement.

§ VIII.

MÉTHODES SPÉCIALES POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

480. Nous avons vu comment, connaissant l'intégrale indéfinie d'une fonction, on en peut déduire l'intégrale définie de cette fonction, prise entre des limites données quelconques.

Mais il y a beaucoup d'intégrales définies que l'on peut calculer entre certaines limites, sans avoir besoin de connaître l'intégrale indéfinie. Nous allons exposer quelques-unes des méthodes que l'on peut employer dans ce calcul, et qui peuvent même servir, dans certains cas, à faciliter la détermination de l'intégrale indéfinie.

Les méthodes dont nous parlerons ici sont celles de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$, et celles qui sont fondées sur la transformation d'une intégrale simple en intégrale double.

481. La différentiation et l'intégration sous le signe $\int$ fournissent un procédé de calcul pour les intégrales, tant définies qu'indéfinies. Nous allons appliquer cette méthode à un certain nombre d'exemples.

I. En désignant par α une constante positive, on a

$$\int e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + C, \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Si l'on différentie n fois chacune de ces intégrales par rapport à α, on en tire

$$\int e^{-\alpha x} x^n\,dx = (-1)^{n+1} D_\alpha^n \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + C = (-1)^n e^{-\alpha x}(x^n + \ldots) + D_\alpha^n \frac{1}{\alpha} + C,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n\,dx = (-1)^n D_\alpha^n \frac{1}{\alpha} = \frac{1.2\ldots n}{\alpha^{n+1}}.$$

Si l'on pose $e^{-x} = y$, ces formules pourront s'écrire sous la forme

$$\int y^{\alpha-1} \log y^n\,dy = D_\alpha^n \frac{y^\alpha}{\alpha} + C,$$

$$\int_0^1 y^{\alpha-1} \log y^n\,dy = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{\alpha^{n+1}},$$

et ces dernières se tireraient directement par différentiation des valeurs des intégrales $\int y^{\alpha-1}\,dy$, $\int_0^1 y^{\alpha-1}\,dy$.

II. Si, au lieu de différentier les intégrales définies précédentes par rapport à α, on les intègre par rapport à ce paramètre entre les limites a et b, il vient, par la règle de l'intégration sous le signe $\int$, a et b étant positifs,

$$\int_a^b \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{y^{b-1} - y^{a-1}}{\log y}\,dy = \log\frac{b}{a}.$$

On obtient ainsi la valeur d'une intégrale définie, prise entre des limites favorables, quoique l'intégrale indéfinie correspondante constitue une transcendante irréductible aux fonctions élémentaires. Nous verrons de nombreux exemples de cas analogues.

III. Pour $\alpha > 0$, on a

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}.$$

En différentiant n fois par rapport à α, il vient

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} D_\alpha^n \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc tang} \frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) + C,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2\alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Si, au lieu de différentier l'intégrale définie, on l'intègre par rapport à α entre les limites a et b, il vient, a et b étant positifs,

$$\int_0^\infty dx \log \frac{x^2+b}{x^2+a} = \pi(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

IV. Nous avons trouvé (456, IV), a étant positif,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

On tirerait de ces intégrales une infinité d'autres, en les différentiant un nombre quelconque de fois par rapport à a et par rapport à b.

En les intégrant par rapport à a entre les limites positives a et A, il vient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-Ax}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{A^2+b^2}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-Ax}}{x} \sin bx\, dx = \text{arc tang} \frac{A}{b} - \text{arc tang} \frac{a}{b}.$$

Si, dans ces dernières formules, on fait tendre a vers zéro, A vers l'infini, on trouve, à la limite,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x} dx = \infty, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

en prenant, dans la seconde formule, le signe + ou le signe —, suivant que b est positif ou négatif. On voit que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx$ est, comme l'intégrale que nous avons traitée plus

haut [459, III], une fonction discontinue de b, égale à $-\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs négatives de cette variable, à $+\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs positives, et évidemment à zéro pour $b = 0$.

482. Une autre méthode de calcul des intégrales définies est fondée sur la transformation d'une intégrale simple en intégrale double. On évalue ensuite celle-ci par l'interversion de l'ordre des intégrations, après avoir, s'il y a lieu, changé de variables.

Exemples. — I. Nous avons vu que, pour $z > 0$, on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zy}\,dy.$$

On peut donc, dans l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$, écrire, à la place du facteur $\frac{1}{x}$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xy}\,dy$, ce qui donne, en intervertissant l'ordre des intégrations, et d'après [456, IV],

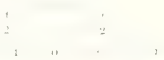
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin bx\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy}\sin bx\,dx$$

$$= \int_0^\infty dy\,\frac{b}{y^2+b^2} = \pm\frac{\pi}{2},$$

suivant que b est $>$ ou $<$ 0, ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans le numéro précédent.

II. De l'intégrale que nous venons de calculer on peut déduire

Fig. 50.



la suivante :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\cos ax\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(b-a)x}{x}\,dx.$$

Les deux intégrales du second membre ayant pour valeurs $\pm\frac{\pi}{4}$, suivant le signe $1 \pm a$, on en conclut facilement que la fonction discontinue de a, $y = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin x}{x}\cos ax\,dx$ prend (*fig.* 31) pour

$$a < -1, \quad -1 < a < -1, \quad a = -1 \quad \text{et} \quad a > +1, \quad +1 > a > -1$$

les valeurs respectives

$$0, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 0.$$

483. Soit l'intégrale définie $u = \int_a^b X\,dx$, X étant une fonction donnée de x. Cette intégrale peut aussi s'écrire sous la forme $u = \int_a^b Y\,dy$, Y étant ce que devient la fonction X, lorsqu'on y remplace x par y. On a donc

$$u^2 = \left(\int_a^b X\,dx\right) \times \left(\int_a^b Y\,dy\right).$$

Cette expression est [**236**] la limite du produit

$$\begin{aligned}
&(X_0\,dx_0 + X_1\,dx_1 + \ldots + X_{n-1}\,dx_{n-1})(Y_0\,dy_0 + Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_{n-1}\,dy_{n-1}) \\
&\quad = dx_0(X_0 Y_0\,dy_0 + \ldots + X_0 Y_{n-1}\,dy_{n-1}) \\
&\qquad + dx_1(X_1 Y_0\,dy_0 + \ldots + X_1 Y_{n-1}\,dy_{n-1}) \\
&\qquad + \ldots,
\end{aligned}$$

ou, en posant $XY = f(x, y)$, $a = x_0$,

$$u^2 = \lim\left[dx_0\int_a^b f(x_0, y)\,dy + dx_1\int_a^b f(x_1, y)\,dy + \ldots + dx_{n-1}\int_a^b f(x_{n-1}, y)\,dy\right],$$

c'est-à-dire

$$u^2 = \int_a^b dx \int_a^b XY\,dy.$$

Ainsi la recherche de l'intégrale simple $\int X\,dx$ se trouve ramenée à celle de l'intégrale double $\iint XY\,dx\,dy$, prise par rapport à chacune des variables entre les limites a, b.

484. Soit proposé, par exemple, de calculer l'intégrale définie

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Nous aurons, d'après la transformation du numéro précédent,

$$u^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En introduisant la nouvelle variable $t = \frac{y}{x}$, et remarquant que, pour embrasser tous les points du plan qui sont dans l'angle des coordonnées positives, il faut faire varier t, ainsi que x, de zéro à ∞, il viendra (477)

$$u^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\,x\,dx = \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4};$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Si l'on employait la transformation en coordonnées polaires, on aurait, en faisant varier r de zéro à ∞, p de zéro à $\frac{\pi}{2}$,

$$u^2 = \int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} dp = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

En remplaçant x par ax, on tirera de la formule que nous venons d'obtenir

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

ou, en substituant à a^2 la quantité $\alpha > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

d'où l'on peut déduire une série d'autres intégrales, en différentiant ou en intégrant par rapport à α.

485. Traitons encore quelques exemples de détermination d'in-

tégrales définies par la différentiation sous le signe $\int$, combinée avec l'intégration.

I. Soit l'intégrale

$$u = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx.$$

En la différentiant par rapport à b, il vient

$$\frac{du}{db} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin bx . x\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2a^2} e^{-a^2x^2} \sin bx\right]_0^\infty - \frac{b}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx,$$

ou

$$\frac{du}{db} = -\frac{b}{2a^2} u, \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{2a^2} b\, db, \quad u = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

C étant une constante arbitraire. Or, pour $b = 0$, u se réduit à

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Substituant ces valeurs, on aura

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} = C;$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

II. Soit l'intégrale

$$u = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx.$$

En différentiant par rapport à a, puis posant $x = \frac{a}{y}$, il vient

$$\frac{du}{da} = -2a\int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2} = -2\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^2}{y^2} + y^2\right)} dy = -2u,$$

d'où

$$\frac{du}{u} = -2da, \quad u = Ce^{-2a}.$$

Or, pour $a = 0$, on a (484) $u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C$; donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

III. Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^\infty e^{-ax} \sin^2 bx \frac{dx}{x},$$

a étant positif. On trouve, en différentiant par rapport à b,

$$\frac{du}{db} = \int_0^\infty e^{-ax} \sin 2bx \frac{dx}{x}, \quad \frac{d^2u}{db^2} = 2\int_0^\infty e^{-ax} \cos 2bx\, dx.$$

Or on a (n° 456, IV), en changeant b en $2b$, que la dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{d^2u}{db^2} = \frac{2a}{a^2 + 4b^2}.$$

Intégrant cette expression par rapport à b, et remarquant que la valeur de $\frac{du}{db}$ s'annule avec b, on trouve

$$\frac{du}{db} = \operatorname{arc\,tang} \frac{2b}{a}.$$

Enfin, en intégrant de nouveau, u s'annulant aussi avec b, il vient

$$u = b \operatorname{arc\,tang} \frac{2b}{a} - \frac{a}{4} \log\left(1 + \frac{4b^2}{a^2}\right).$$

IV. Soit proposée l'intégrale

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2 + x^2} \frac{dx}{x};$$

on a

$$\frac{du}{db} = \int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{a^2 + x^2},$$

$$\frac{d^2u}{db^2} = -\int_0^\infty \frac{\sin bx\, x\, dx}{a^2 + x^2} = -\int_0^\infty \sin bx \left(\frac{a^2 + x^2}{x} - \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\sin bx\, dx}{x} + a^2 u,$$

ou enfin [481, IV et 482, I], en supposant $b > 0$, $= -\frac{\pi}{2} + a^2 u$, d'où

$$\frac{d^2 u}{db^2} - a^2 u + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Multipliant par $2du$, et intégrant en remarquant que, pour $b = 0$, on a $u = 0$, et $\frac{du}{db} = +\frac{\pi}{2a}$, si $a > 0$,

$$\frac{du^2}{db^2} = a^2 u^2 - \pi u + \frac{\pi^2}{4a^2},$$

d'où

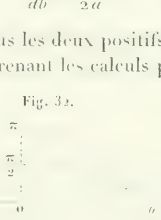
$$\frac{du}{db} = \frac{\pi}{2a} - au.$$

Intégrant de nouveau, et déterminant la constante par la condition que u s'annule avec b, on trouve

$$u = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ab}), \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{db} = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \quad \frac{d^2 u}{db^2} = -\frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Si b et a n'étaient pas tous les deux positifs, on obtiendrait des résultats différents. En reprenant les calculs précédents dans dif-

Fig. 32.



férentes hypothèses sur les signes de ces quantités, on trouverait, en posant, pour abréger,

$$v = a\frac{du}{db} = \int_0^\infty \frac{a \cos bx\,dx}{a^2 + x^2}, \quad w = -\frac{d^2 u}{db^2} = \int_0^\infty \frac{x \sin bx\,dx}{a^2 + x^2},$$

pour $a > 0$, $b > 0$, $v = w = +\frac{\pi}{2} e^{-ab}$;

pour $a < 0$, $b > 0$, $v = -w = -\frac{\pi}{2} e^{+ab}$;

pour $a > 0$, $b < 0$, $v = -w = +\frac{\pi}{2} e^{+ab}$;

pour $a < 0$, $b < 0$, $v = w = -\frac{\pi}{2} e^{-ab}$.

D'après cela, si l'on suppose, par exemple, a positif, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax - e^{-bx}\cos x}{x^2+1}\,dx$$

se réduira à zéro pour toute valeur de b négative, à $\frac{\pi}{2}$ pour $b = 0$, et aura la valeur variable πe^{-ab} pour b positif (*fig.* 32).

§ IX.

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

486. On donne les noms d'*intégrales eulériennes de première* et *de seconde espèce* aux deux expressions

$$(1)\qquad (p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

$$(2)\qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{z}\right)^{p-1} dz,$$

dont la première est une fonction des deux variables p, q, et la seconde une fonction de la variable p.

Occupons-nous d'abord de l'intégrale de première espèce.

En changeant x en $1-x$ dans l'intégrale (1), on échange entre eux les exposants p et q. Donc $(p, q) = (q, p)$, c'est-à-dire que la fonction (p, q) est symétrique par rapport aux deux variables.

Si l'on pose $x = \cos^2\varphi$, d'où $1-x = \sin^2\varphi$, $dx = -2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$, l'expression de (p, q) prend la forme

$$(3)\qquad (p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

En posant $t = \frac{x}{1-x}$, d'où $x = \frac{t}{1+t}$, $dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$, on a cette autre expression

$$(4)\qquad (p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}.$$

487. L'intégrale (p, q) peut s'exprimer au moyen d'intégrales de seconde espèce.

En effet, si dans l'intégrale (2) on change x en x^2, il vient

$$(5) \qquad \Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx.$$

On aura de même

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy;$$

par conséquent, en faisant le produit de ces intégrales comme au n° 483, puis posant $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, on a (477)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi,$$

c'est-à-dire, d'après les formules (5) et (3), $= \Gamma(p+q).(p, q)$; donc

$$(6) \qquad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

488. On peut démontrer autrement cette formule fondamentale. En changeant, dans (2), x en αx, α étant > 0, il vient

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}.$$

On a de même

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+1)x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{(1+\alpha)^n};$$

par conséquent,

$$\frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-(\alpha+1)x} x^{n-1} \alpha^{p-1} dx.$$

Intégrant les deux membres par rapport à α, et remarquant que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{p-1} d\alpha = \frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

il vient

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1} d\alpha}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\Gamma(p)}{x^p} e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-p-1} dx,$$

ou enfin, d'après (4),

$$p, n = p \frac{\Gamma(p) \Gamma(n-p)}{\Gamma(n)},$$

ce qui donne la formule (6), en changeant $n - p$ en q.

489. Passons à l'étude des propriétés de la fonction Γ.

On trouve, en intégrant par parties,

$$\int f(x) \, dx = x f(x) - \int x f'(x) \, dx.$$

En prenant pour limites zéro et ∞, il vient, dans la supposition de $p > 1$,

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) \tag{8}$$

Si l'on désigne par n le plus grand nombre entier contenu dans $p - 1$, on aura, pour $p > 1$,

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots(p-n)\Gamma(p-n-1). \tag{9}$$

Pour $p < 1$, mais positif,

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p(p+1)} \Gamma(p+1). \tag{10}$$

Ces deux formules permettent de ramener le calcul de Γ relatif à un argument positif quelconque, au cas où cet argument est compris entre 1 et 2.

Si p est entier, la formule (9) conduira à $\Gamma(1)$, qui est égal à l'unité. On aura donc, dans ce cas,

$$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1). \tag{11}$$

Si, dans la formule (5), on fait $p = \frac{1}{2}$, il viendra [484]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

D'après cela, on aura, n étant entier et positif,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1.3.5\ldots(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}. \tag{12}$$

490. En faisant, dans la formule (4), $q = 1 - p$, pour $0 < p < 1$,

et appliquant la formule (6), on aura, à cause de $\Gamma(1) = 1$,

$$(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}.$$

Pour évaluer maintenant cette dernière intégrale, considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}},$$

m et n étant des entiers positifs, et $m < n$. En décomposant la fonction $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$ en fractions de la forme $\frac{2A(x-a)+2Bb}{(x-a)^2+b^2}$, et appliquant la formule du n° 469 (IV), on aura, pour la valeur de l'intégrale,

$$2\pi(B + B' + \ldots).$$

Or, d'après le calcul du n° 426 (III), on a, en changeant m en $2m$,

$$2B = \frac{1}{n}\sin\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2n}, \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Si donc on fait, pour abréger, $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \alpha$, on aura

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n}[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha].$$

La somme de sinus est la partie imaginaire de la somme de la progression

$$e^{\alpha i} + e^{3\alpha i} + \ldots + e^{(2n-1)\alpha i} = e^{\alpha i}\cdot\frac{e^{2n\alpha i}-1}{e^{2\alpha i}-1},$$

et comme $2n\alpha = (2m+1)\pi$, $e^{2n\alpha i} = -1$. Donc la somme des exponentielles est égale à

$$\frac{-2e^{\alpha i}}{e^{2\alpha i}-1} = \frac{i}{\sin\alpha},$$

et, par suite,

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n}\operatorname{coséc}\alpha;$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\operatorname{coséc}\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

La fonction sous le signe f étant une fonction paire, on a [illegible] 158), en prenant la moitié,

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n}\operatorname{cosec}\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Si l'on pose maintenant $x^2 = t$, $\frac{2m+1}{2n} = p$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

On peut ensuite, en faisant varier m et n, faire converger p vers un nombre quelconque compris entre zéro et $+1$. On aura donc enfin la formule

$$(13)\qquad \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

491. *Formule de Dirichlet.* — Considérons l'intégrale multiple

$$(14)\qquad u = \int\int\cdots\int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

étendue à toutes les valeurs positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui vérifient la condition

$$x_1+x_2+\ldots+x_n = 1,$$

les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant tous positifs. Nous allons prouver que l'on a

$$(15)\qquad u = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1-p_1-p_2-\ldots-p_n)}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

On a d'abord, pour $n=1$, à cause de la formule (8),

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(1-p_1)}.$$

Pour $n=2$,

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1\int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1}\,dx_2 = \int_0^1 x_1^{p_1-1}(1-x_1)^{p_2}\,dx_1 = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(1-p_1-p_2)}\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(1-p_1-p_2)}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

de sorte que la formule est vraie pour $n = 2$.

Pour $n = 3$,

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^{y_2} x_2^{p_2-1}\,dx_2 \int_0^{y_3} x_3^{p_3-1}\,dx_3,$$

en posant $y_2 = 1 - x_1$, $y_3 = y_2 - x_2 = 1 - x_1 - x_2$. Si l'on fait

$$x_3 = y_3 z_3, \quad x_2 = y_2 z_2,$$

l'intégrale pourra s'écrire sous la forme

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^1 y_2^{p_2} z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 y_3^{p_3} z_3^{p_3-1}\,dz_3,$$

ou, à cause de $y_2 = 1 - x_1$, $y_3 = y_2 - y_2 z_2 = (1 - x_1)(1 - z_2)$,

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^1 (1 - x_1)^{p_2} z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 (1 - x_1)^{p_3}(1 - z_2)^{p_3} z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= \int_0^1 x_1^{p_1-1}(1 - x_1)^{p_2+p_3}\,dx_1 \int_0^1 z_2^{p_2-1}(1 - z_2)^{p_3}\,dz_2 \int_0^1 z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(1 + p_2 + p_3)}{\Gamma(1 + p_1 + p_2 + p_3)} \cdot \frac{\Gamma(p_2)\,\Gamma(1 + p_3)}{\Gamma(1 + p_2 + p_3)} \cdot \frac{\Gamma(1 + p_3)}{\Gamma(p_3)} \cdot \frac{1}{p_3}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\Gamma(p_3)}{\Gamma(1 + p_1 + p_2 + p_3)}.$$

Pour $n = 4$, on posera de même

$$1 - x_1 = y_2, \quad y_2 - x_2 = y_3, \quad y_3 - x_3 = y_4,$$

puis

$$x_3 = y_4 z_3, \quad x_3 = y_3 z_3, \quad x_2 = y_3 z_2,$$

d'où

$$y_2 = 1 - x_1, \quad y_3 = (1 - x_1)(1 - z_2), \quad y_4 = (1 - x_1)(1 - z_2)(1 - z_3),$$

et l'on décomposera ainsi l'intégrale multiple en un produit d'intégrales que l'on sait évaluer séparément, et ainsi de suite pour toutes les valeurs de n; donc la formule (15) est générale.

Soit maintenant l'intégrale

$$v = \int\int \ldots \int t_1^{q_1-1} t_2^{q_2-1} \ldots t_n^{q_n-1}\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n,$$

étendue à toutes les valeurs possibles de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, pour

lesquelles on a

$$\int_{a_1}^{b_1} \quad \int_{a_2}^{b_2} \quad \cdots \quad \int_{a_n}^{b_n} \quad .$$

$q_1, \ldots, q_n, m_1, \ldots, m_n, a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes positives. Si l'on pose, pour un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n$,

$$\int_{a_i}^{b_i} x_i \, dx_i = \int_{a_i}^{b_i} \quad \ldots \quad dx_i,$$

il vient

$$\frac{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}}{m_1 m_2 \ldots m_n} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \ldots x_n^{m_n} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{m_1}\right) \Gamma\left(\frac{q_2}{m_2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{q_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{q_1}{m_1} + \frac{q_2}{m_2} + \ldots + \frac{q_n}{m_n}\right)}.$$

formule de Dirichlet, qui renferme un grand nombre de résultats relatifs au calcul des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie, etc.

§ X.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

492. Le calcul approché d'une intégrale définie peut se ramener à l'évaluation approximative de l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes.

On peut toujours supposer que l'ordonnée de la courbe conserve un signe constant, et que la concavité soit toujours tournée dans le même sens. Si cela n'avait pas lieu, on partagerait l'intervalle de l'intégration en intervalles partiels, par des ordonnées correspondantes aux points d'intersection avec l'axe des x et aux points d'inflexion.

493. *Formule de Poncelet.* — Soit $\int_{x_0}^{X} y \, dx$ l'intégrale à calculer. Divisons l'intervalle $X - x_0$ en un nombre pair $2n$ de parties égales de longueur commune h (*fig.* 33). Si, par les sommets des ordonnées correspondantes aux abscisses d'indices impairs $x_1, \ldots,$

x_{2n-1}, on mène des tangentes à la courbe, l'aire d'un trapèze, tel que ABB'A', sera

$$y_1(x_2 - x_0) = 2hy_1.$$

Donc la somme totale des trapèzes formés par les tangentes sera

$$Q_{2n} = 2h(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) = 2h\Sigma y_{2p-1}.$$

Si l'on mène maintenant les cordes qui joignent les extrémités

Fig. 33.

des mêmes ordonnées d'indices impairs et celles qui joignent les extrémités de y_0 et de y_1, de y_{2n-1} et de Y, la somme des trapèzes correspondants sera

$$P_{2n} = h\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \ldots + (y_{2n-2} + y_{2n-1}) + \frac{1}{2}(y_{2n-1} + Y)\right]$$

$$= h\left[2\Sigma y_{2p-1} + \frac{1}{2}(y_0 + Y) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{2n-1})\right]$$

$$= Q_{2n} + h\frac{y_0 + Y}{2} - h\frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}.$$

La différence entre P_{2n} et Q_{2n} est égale à la différence entre deux trapèzes de hauteur commune h, et dont les bases seraient y_0 et Y, y_1 et y_{2n-1}. Si l'on joint F et K, C et I, HGB' étant l'ordonnée médiane, on a

$$HB' = \frac{y_0 + Y}{2}, \quad GB' = \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2};$$

donc

$$P_{2n} - Q_{2n} = h.GH,$$

ce qui donne une limite supérieure de l'erreur que l'on commet, en prenant pour valeur de l'aire soit P_{2n}, soit Q_{2n}.

494. *Formule de Simpson.* — Partageons encore $X - x_0$ en $2n$ parties égales, et assimilons l'arc de courbe correspondant à chaque intervalle $2h$ à l'arc d'une parabole ayant son axe parallèle aux ordonnées. Si l'on représente par

$$y = a + bx + cx^2$$

l'équation de la parabole pour un intervalle $2h$, l'aire de cette parabole sera

$$\int_{x=0}^{x=2h} y\,dx = \frac{2}{3}h(3a + 3bh + 4ch^2).$$

Or les ordonnées correspondantes à cet intervalle sont

$$y_{2p-2} = a - bh + ch^2,\quad y_{2p-1} = a + bh + ch^2,\quad y_{2p} = a + 2bh + 4ch^2,$$

d'où l'on conclut

$$2(3a + 3bh + 4ch^2) = y_{2p-2} + 4y_{2p-1} + y_{2p}$$

donc l'aire du trapèze parabolique a pour valeur

$$\frac{1}{3}h(y_{2p-2} + 4y_{2p-1} + y_{2p}).$$

En faisant la somme de tous les trapèzes analogues, on aura, pour valeur approchée de l'aire,

$$S = \frac{1}{3}h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + y_{2n}) = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

$$= \frac{2}{3}h\left(\Sigma y_{2p} + 2\Sigma y_{2p-1} - \frac{y_0 - Y}{2}\right).$$

495. *Formule de Maclaurin ou d'Euler.* — Nous allons établir cette formule générale, qui comprend les précédentes comme cas particuliers. Nous montrerons d'abord comment cette formule a été obtenue par les premiers inventeurs. Pour rendre ensuite la démonstration rigoureuse, nous ferons voir comment, en s'appuyant sur les propriétés d'une certaine classe de fonctions, introduites pour la première fois par Jacques Bernoulli, on peut arriver à l'expression du terme complémentaire de la formule. La démonstration que nous donnons ici est due à M. Imchenetsky (voir *Giornale di Matematiche*, t. IX, 1871).

Supposons l'intervalle $X - x_0$ divisé en n parties égales à h. En désignant par S_i l'aire de la courbe terminée à l'abscisse x_i, on aura cette suite d'égalités

$$S_1 - S_0 = hy_0 + \frac{h^2}{2}y' + \frac{h^2}{2.3}y''_0 + \ldots,$$

$$S_2 - S_1 = hy_1 + \frac{h^2}{2}y'_1 + \frac{h^3}{2.3}y''_1 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n - S_{n-1} = hy_{n-1} + \frac{h^2}{2}y'_{n-1} + \frac{h^3}{2.3}y''_{n-1} + \ldots;$$

d'où

$$S_n - S_0 = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{h^2}{2}(y'_0 + y'_1 + \ldots + y'_{n-1}) + \ldots$$

$$= h\sum_0^{n-1} y + \frac{h^2}{1.2}\sum_0^{n-1} y' + \frac{h^3}{2.3}\sum_0^{n-1} y'' + \ldots.$$

On aura de même, en remarquant que $y, y', y'', \ldots$ sont les dérivées successives de S,

$$y_n - y_0 = h\Sigma y' + \frac{h^2}{2}\Sigma y'' + \frac{h^3}{2.3}\Sigma y''' + \ldots,$$

$$y'_n - y'_0 = h\Sigma y'' + \frac{h^2}{2}\Sigma y''' + \frac{h^3}{2.3}\Sigma y^{\text{IV}} + \ldots,$$

$$y''_n - y''_0 = h\Sigma y''' + \frac{h^2}{2}\Sigma y^{\text{IV}} + \frac{h^3}{2.3}\Sigma y^{\text{V}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations par des indéterminées $A_0 h, A_1 h^2, \ldots$, et ajoutons-les à la précédente. On aura, en écrivant S au lieu de $S_n - S_0$,

$$S = A_0 h(y_n - y_0) + A_1 h^2(y'_n - y'_0) + A_2 h^3(y''_n - y''_0) + \ldots$$

$$= h\Sigma y + h^2\left(\frac{1}{2} + A_0\right)\Sigma y' + h^3\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}A_0 + A_1\right)\Sigma y'' + \ldots.$$

Déterminons maintenant $A_0, A_1, \ldots$, de manière à réduire le second membre de cette égalité à son premier terme, en posant

$$\frac{1}{2} + A_0 = 0,\quad \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}A_0 + A_1 = 0,\quad \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + A_2 = 0 \ldots.$$

On en conclura

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{12}, \quad A_2 = 0,$$

$$A_3 = \frac{1}{720}, \quad A_4 = 0,$$

$$A_5 = \frac{1}{30240}, \quad A_6 = 0,$$

$$\cdots$$

On voit que, à l'exception de A_0, tous les coefficients d'indices pairs sont nuls. On a donc

$$S = h\,y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + A_1 h\,(y_1 - y_0') + A_3 h^3 (y_1''' - y_0''') + \ldots$$

$$= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{h^2}{12}(y_n' - y_0') + \frac{h^4}{720}(y_n''' - y_0''') - \frac{h^6}{30240}(y_n^{\mathrm{v}} - y_0^{\mathrm{v}}) + \ldots,$$

ou, en posant

$$y_0 = Y, \quad y_1' = Y_1, \quad \ldots \quad \text{et} \quad P_n = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}Y\right),$$

$$\text{et} \quad S = P_n - \frac{Y' - y_0'}{12}h^2 + \frac{Y''' - y_0'''}{720}h^4 - \frac{Y^{\mathrm{v}} - y_0^{\mathrm{v}}}{30240}h^6 + \ldots$$

Si l'on subdivise en deux parties égales chaque intervalle, on a, en changeant n en $2n$, h en $\frac{1}{2}h$,

$$S = P_{2n} - \frac{Y' - y_0'}{48}h^2 + \frac{Y''' - y_0'''}{11520}h^4 - \frac{Y^{\mathrm{v}} - y_0^{\mathrm{v}}}{1935360}h^6 + \ldots$$

Soit maintenant Q_n la valeur approchée de S, que l'on obtient en construisant des rectangles sur les ordonnées médianes $y_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{3}{2}}, \ldots, y_{n-\frac{1}{2}}$, savoir :

$$Q_n = h\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}}\right),$$

on aura

$$2P_{2n} = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_{\frac{1}{2}} + y_1 + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Y\right) = P_n + Q_n.$$

En retranchant l'équation (1) du double de l'équation (2), il reste donc

$$(3)\qquad S = Q_n + \frac{Y' - y'_0}{24} h^2 - \frac{7(Y''' - y'''_0)}{5760} h^4 + \frac{31(Y^{\text{v}} - y^{\text{v}}_0)}{967680} h^6 - \ldots.$$

Des formules (1) et (3), qui montrent que P_n et Q_n sont des valeurs de S approchées aux quantités près de l'ordre de h^2, on tire, en éliminant h^2, la formule

$$(4)\qquad S = \frac{1}{3}(P_n + 2Q_n) - \frac{Y''' - y'''_0}{2880} h^4 + \frac{Y^{\text{v}} - y^{\text{v}}_0}{96768} h^6 - \ldots,$$

où la correction est de l'ordre de h^4. Le premier terme

$$\frac{P_n + 2Q_n}{3} = \frac{h}{3}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}Y \\ \quad + 2\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right]$$

coïncide avec la valeur fournie par la formule de Simpson.

Le terme Q_n de la formule (3) correspond à la formule de Poncelet.

496. Établissons maintenant d'une manière rigoureuse la formule (1) du numéro précédent

On appelle *fonctions de Bernoulli* une suite de polynômes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., déterminés successivement par les relations

$$\varphi_1(x) = x,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [A_0 + \varphi_1(x)]\,dx = A_0 x + \frac{1}{2!}x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [A_1 + \varphi_2(x)]\,dx = A_1 x + \frac{A_0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varphi_{k+2}(x) &= \int_0^x [A_k + \varphi_{k+1}(x)]\,dx \\ &= A_k x + \frac{A_{k-1}}{2!}x^2 + \ldots + \frac{A_0}{(k+1)!}x^{k+1} + \frac{1}{(k+2)!}x^{k+2}. \end{aligned}$$

Ces polynômes s'annulent tous avec x. De plus, les coefficients A_0, A_1, ... sont déterminés de telle façon que tous ces mêmes polynômes, le premier excepté, s'annulent pour $x = 1$. Cette condition entraîne les relations

$$0 = A_0 + \frac{1}{2!},$$

$$0 = A_1 + \frac{A_0}{2!} + \frac{1}{3!},$$

$$0 = A_2 + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_0}{3!} + \frac{1}{4!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où l'on tire

$$6 \quad A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{12}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{720}, \quad \dots$$

En mettant pour A_0 sa valeur, on a généralement, entre les coefficients A_1, A_2, ..., A_k, la relation

$$7 \qquad 0 = A_k + \frac{A_{k-1}}{2!} + \frac{A_{k-2}}{3!} + \dots + \frac{A_1}{k!} + \frac{1}{(k+2)!}.$$

497. Les équations de définition des fonctions $\varphi_k(x)$ donnent

$$\varphi'_{k-1}(x) = A_k + \varphi_{k-1}(x),$$

$$\varphi'_{k-2}(x) = A_{k-1} + \varphi_{k-2}(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi^{(k+1)}_{k-k}(x) = A_0 + \varphi_{k-k}(x),$$

$$\varphi^{(k+2)}_{k-k-1}(x) = 1,$$

d'où, en faisant $x = 1$,

$$\varphi'_{k-2}(1) = A_{k-1}, \quad \varphi''_{k-3}(1) = A_{k-2}, \quad \dots, \quad \varphi_{k-k}(1) = A_0, \quad \dots$$

$$\varphi^{(k-1)}_{k-2}(1) = A_0 + 1 = \frac{1}{2};$$

par suite, le développement de $\varphi_{k+2}(x)$, suivant les puissances de $x - 1$, sera

$$8 \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{k+2}(x) &= A_k(x-1) + \frac{A_{k-1}}{2!}(x-1)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2.(k+1)!}(x-1)^{k+1} + \frac{1}{(k+2)!}(x-1)^{k+2}. \end{aligned} \right.$$

En faisant maintenant $x = 0$, on aura, entre les coefficients A_k, la nouvelle relation

$$(9)\quad 0 = A_k + \frac{A_{k-1}}{2!} + \frac{A_{k-2}}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k A_1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1} k}{2(k+2)!}.$$

En faisant $k = 2n$, et combinant les relations (7) et (9) par soustraction et par addition, on obtiendra deux relations séparées, l'une entre les coefficients d'indices pairs

$$(10)\quad 0 = A_{2p} + \frac{A_{2p-2}}{3!} + \ldots + \frac{A_2}{(2p-1)!},$$

l'autre entre les coefficients d'indices impairs

$$(11)\quad 0 = \frac{A_{2p-1}}{2!} + \frac{A_{2p-3}}{4!} + \ldots + \frac{A_1}{(2p)!} + \frac{n}{(2p+2)!}.$$

Le coefficient A_2 étant nul par les formules (6), on voit, en faisant, dans (10), p égal successivement à 2, 3, 4, ..., que tous les coefficients d'indices pairs A_{2p} sont nuls.

D'après cela, en faisant, dans (7), $k = 2p - 1$, et supprimant tous les termes nuls, on obtient une seconde relation entre les coefficients d'indices impairs

$$(12)\quad 0 = A_{2p-1} + \frac{A_{2p-3}}{3!} + \ldots + \frac{A_1}{(2p-1)!} + \frac{2p-1}{2(2p+1)!}.$$

Des relations (11) et (12), on peut tirer une double expression de la valeur d'un coefficient quelconque A_{2p-1}, savoir :

$$A_{2p-1} = (-1)^{p-1} \cdot 2^p \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{p}{(2p+2)!} & \frac{1}{(2p)!} & \frac{1}{(2p-2)!} & \ldots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{2p-1}{(2p+1)!} & \frac{1}{(2p-1)!} & \frac{1}{(2p-3)!} & \ldots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

498. D'après cela, les expressions générales (5) et (8) de $\varphi_{k+2}(x)$ se présenteront chacune sous deux formes différentes, suivant que l'indice $k+2$ sera impair ou pair. Dans le premier cas, on aura

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_{k+2}(x) &= \frac{A_{2p-1}}{1\cdot 2\cdots(2p-1)}\,x^{2p-1} \\
&\quad - \frac{A_1}{(2p-1)!}\,x^{2p-1} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&\quad - \frac{A_{2p-1}}{(2p-1)!}\,x^{2p-1} + \frac{A_{2p-3}}{(2p-3)!}\,x^{2p-3} - \cdots \\
&\quad - \frac{A_1}{(2p-1)!\,2.3\cdots(2p-1)}\,x^{2p-1} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_{k+2}(x) &= \frac{A_{2p-1}}{2!}\,x^{2p-1} - \frac{A_{2p-3}}{4!}\,x^{2p-3} + \cdots \\
&\quad - \frac{A_1}{2!\,2.3\cdots(2p-1)}\,x^{2p-1} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \frac{A_{2p-1}}{2!}\,x^{2p-1} - \frac{A_{2p-3}}{4!}\,x^{2p-3} + \cdots - \frac{A_1}{2!}\,x + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.
\end{aligned}
\right.
$$

En remplaçant x par $1-x$ dans les secondes expressions de chacune de ces formules, on en conclut immédiatement

$$(15)\qquad \varphi_{k+1}(1-x) = -\varphi_{k+1}(x),$$

$$(16)\qquad \varphi_{k+2}(1-x) = \varphi_{k+2}(x).$$

499. Pour $x = \frac{1}{2}$, l'équation (15) donne

$$(17)\qquad \varphi_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

et, comme on a

$$\varphi_{2p+1}(x) = \int_0^x [A_{2p-1} - \varphi_{2p}(x)]\,dx,$$

on en conclut

$$(18)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p}(x)\,dx = -\frac{1}{2}A_{2p-1}.$$

Pour obtenir les valeurs de $\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)$ et de $\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p-1}(x)\,dx$, rem-

plaçons, dans (16), x par $\frac{1}{2} - x$, ce qui donnera

$$(19) \qquad \varphi_{2p+2}\left(\frac{1}{2} - x\right) = \varphi_{2p+2}\left(\frac{1}{2} - x\right),$$

ou, en développant le second membre par le théorème de Taylor, et remarquant que les premières formules du n° 497 donnent

$$\varphi_{2p+2}^{(2q+1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_{2p+2}^{(2q+2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_{2p-q}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2(p-q)-1},$$

il vient, en faisant ensuite $x = \frac{1}{2}$,

$$0 = \varphi_{2p+2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2p-1}}{2^2 . 2!} + \ldots + \frac{\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) + A_1}{2^{2p} . 2p!} + \frac{1}{2^{2p+2} . 2p+2!}.$$

D'autre part, la première expression (14) donne

$$0 = \varphi_{2p+2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{A_{2p-1}}{2^2 . 2!} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1}{2^{2p} . 2p!} + \frac{1}{2^{2p+2} . 2p+1!} + \frac{1}{2^{2p+2} . 2p+2!}.$$

Ajoutons ces deux équations, multiplions le résultat par 2^{2p-1}, et comparons l'équation obtenue avec la relation (11), en faisant successivement $p = 1, 2, 3, \ldots$; on trouvera, en général, la relation

$$2^{2p-1}\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^p A_{2p-1} = A_{2p-1},$$

ce qui donne

$$(20) \qquad \varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - 2^{2p}}{2^{2p-1}} A_{2p-1};$$

et, puisque $\varphi_{2p}(x) = \int_0^x \varphi_{2p-1}(x)\,dx$, il viendra, pour $x = \frac{1}{2}$,

$$(21) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2p-1}(x)\,dx = \frac{1 - 2^{2p}}{2^{2p-1}} A_{2p-1}.$$

500. Nous avons besoin, pour ce qui va suivre, de connaître la marche de la fonction $\varphi_k(x)$, lorsque x varie entre zéro et 1. Pour

cela, il suffit de connaître les racines que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ peut avoir entre ces mêmes limites.

D'après ce que nous savons sur les expressions de $\varphi_2(x)$ et de $\varphi_3(x)$, le premier de ces polynômes, qui est du second degré, s'évanouit pour les deux valeurs $x = 0$, $x = 1$ de la variable; le second, qui est du troisième degré, a pour ses trois racines $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. Donc, pour les deux valeurs 2 et 3 de l'indice k, *la fonction $\varphi_k(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x comprise soit entre* 0 *et* $\frac{1}{2}$, *soit entre* $\frac{1}{2}$ *et* 1, *et par suite elle conserve un signe constant dans chacun de ces intervalles. Lorsqu'on fait passer x d'un intervalle à l'autre, la fonction de degré pair ne change pas de signe, la fonction de degré impair prend un signe contraire.* Nous allons voir que ces propriétés subsistent pour toutes les valeurs paires ou impaires de l'indice k.

Supposons que la propriété énoncée ait été reconnue vraie jusqu'à la valeur $k = 2p - 1$ de l'indice. Considérons l'équation

$$\varphi_{2p-1}(x) = 0.$$

Son premier membre s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$; mais, dans l'intervalle compris entre zéro et 1, l'équation n'a pas d'autres racines. En effet, l'équation dérivée

$$\varphi'_{2p-1}(x) = \varphi_{2p-1}(x) = 0$$

n'a, par hypothèse, dans cet intervalle, que la racine $x = \frac{1}{2}$. Donc $\varphi_{2p}(x)$ ne passe qu'une seule fois par un maximum ou un minimum, et par suite ne peut s'annuler pour une valeur intermédiaire entre les racines zéro et 1.

Passons à l'équation

$$\varphi_{2p+1}(x) = 0$$

qui est vérifiée pour $x = 0$, $\frac{1}{2}$, 1; dans chacun des intervalles, entre zéro et $\frac{1}{2}$ et entre $\frac{1}{2}$ et 1, il ne peut exister d'autres racines de l'équation : car il est aisé de démontrer que le premier membre $\varphi_{2p+1}(x)$ ne peut devenir maximum ou minimum qu'une seule fois

dans chacun de ces intervalles. Considérons, en effet, l'équation

$$\varphi'_{2p+1}(x) = \varphi_{2p}(x) + A_{2p-1} = 0.$$

Tandis que x varie entre zéro et $\frac{1}{2}$, $\varphi_{2p}(x)$ doit, d'après ce qui précède, varier toujours dans le même sens, et par suite conserver le même signe, en passant de la valeur zéro à la valeur

$$\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(2 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) A_{2p-1}.$$

De la proposition que nous avons démontrée dans toute sa généralité, il résulte encore cette conséquence, que *les coefficients* A_1, A_3, ..., A_{2p-1}, A_{2p+1}, ... *forment une suite de quantités alternativement positives et négatives*. En effet, $\varphi_{2p+2}(x)$ ne change pas de signe de $x = 0$ à $x = 1$; donc, en désignant par ε un infiniment petit positif, et développant $\varphi(\varepsilon)$ suivant les puissances de ε par la formule de Maclaurin [333], on aura, à cause de

$$\varphi_{2p+2}(0) = \varphi'_{2p+1}(0) = \varphi_{2p}(0) = 0,$$

et en ne conservant que les infiniment petits de l'ordre le moins élevé,

$$\varphi_{2p+2}(\varepsilon) = \frac{1}{2} A_{2p-1} \varepsilon^2 + \ldots,$$

quantité de même signe que A_{2p-1}. On a ensuite

$$\varphi_{2p+2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(2 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) A_{2p+1},$$

quantité de signe contraire à A_{2p+1}. Or, $\varphi_{2p+2}(x)$ ne changeant pas de signe dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 1$, il faut que A_{2p-1} et A_{2p+1} soient de signes contraires.

Si l'on pose

$$A_{2p-1} = \frac{(-1)^{p-1} B_{2p-1}}{(2p)!},$$

les quantités B_{2p-1} seront les *nombres de Bernoulli* [293]; mais, pour la simplicité de l'écriture, nous conserverons, dans nos formules, les coefficients A_{2p-1}.

501. Soit maintenant $f(x)$ une fonction finie et continue, ainsi que ses $2p+1$ premières dérivées, pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle entre x_0 et X. La formule du n° 223 peut s'écrire sous la forme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \int_0^1 f'(x+ht)\,dt.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^1 f'(x+ht)\,dt = f(x+h) - h\int_0^1 t f''(x+ht)\,dt,$$

ou, à cause de $t = \varphi_1(t) = \varphi'_2(t) = A_1$,

$$\int_0^1 t f''(x+ht)\,dt = \frac{A_1}{h}\left[f'(x+h) - f'(x)\right] - \frac{A_1}{h}\int_0^1 \varphi_2(t) f'''(x+ht)\,dt.$$

De même, en remplaçant $\varphi_2(t)$ par $\varphi'_3(t) = A_1\varphi_1(t)$,

$$\int_0^1 \varphi_2(t) f'''(x+ht)\,dt = \frac{A_1}{h}\left[f''(x+h) - f''(x)\right] - \frac{A_1}{h}\int_0^1 \varphi_1(t) f^{(4)}(x+ht)\,dt,$$

puis, en remplaçant $\varphi_1(t)$ par $\varphi'_4(t)$,

$$\int_0^1 \varphi_2(t) f'''(x+ht)\,dt = \frac{A_1}{h}\left[f''(x+h) - f''(x)\right] - \frac{A_1}{h}\int_0^1 \varphi_4(t) f^{(5)}(x+ht)\,dt,$$

et par suite

$$\int_0^1 \varphi_2(t) f'''(x+ht)\,dt = \frac{A_1}{h}\left[f'(x+h) - f'(x) - h f''(x)\right] - h^2\int_0^1 \varphi_4(t) f^{(5)}(x+ht)\,dt.$$

En continuant de la même manière, on trouve, en général,

$$\int_0^1 \varphi_{2p-1}(t) f^{(2p+1)}(x+ht)\,dt = \frac{A_1}{h}\left[f^{(2p-2)}(x+h) - f^{(2p-2)}(x) - h f^{(2p-1)}(x)\right]$$

$$= -h\int_0^1 \varphi_{2p-1}(t) f^{(2p)}(x+ht)\,dt$$

$$= h^2\int_0^1 \varphi_{2p}(t) f^{(2p+1)}(x+ht)\,dt.$$

En substituant successivement ces valeurs, on obtiendra le développement suivant :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x-h)-f(x) \\ & \quad = hf'(x-h) + A_0 h[f'(x-h)-f'(x)] \\ & \qquad - A_1 h^3[f'''(x-h)-f'''(x)] \\ & \qquad - A_2 h^5[f^{\text{IV}}(x-h)-f^{\text{IV}}(x)] \\ & \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \qquad - A_{p-1} h^{2p-1}[f^{(2p-1)}(x-h)-f^{(2p-1)}(x)] \\ & \qquad - r_p, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\begin{aligned} r_p &= h^{2p}\int_0^1 \varphi_{2p-1}(t)\, f^{(2p)}(x-ht)\, dt \\ &= -h^{2p+1}\int_0^1 \varphi_{2p}(t)\, f^{(2p+1)}(x-ht)\, dt. \end{aligned}$$

502. Remplacons maintenant successivement, dans la formule (22), x par les valeurs

$$x_0,\quad x_0+h,\quad x_0+2h,\quad \dots\dots\quad x_0+2nh=X,$$

et faisons la somme des équations obtenues ; il viendra

$$\begin{aligned} f(X)-f(x_0) &= h\Sigma f'(x+h) + A_0 h[f'(X)-f'(x_0)] \\ &\quad - A_1 h^3[f'''(X)-f'''(x_0)] \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad - A_{2p-2} h^{2p-2}[f^{(2p-2)}(X)-f^{(2p-2)}(x_0)] \\ &\quad - \Sigma r_p, \end{aligned}$$

ou, en posant $f(x)=\int_{x_0}^{x} y\,dx$, d'où $f^{(k)}(x_0)=y_0^{(k-1)}$, $f^{(k)}(X)=Y^{(k-1)}$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} y\,dx &= h(y_1+y_2+\dots+Y) - \frac{1}{2}h(Y-y_0) \\ &\quad - A_1 h^2(Y'-y_0') - A_3 h^4(Y'''-y_0''') \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad - A_{2p-3} h^{2p-2}(Y^{(2p-3)}-y_0^{(2p-3)}) - \Sigma r_p, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre chose que la formule (1) du n° 495, complétée par le reste $R_p = -\Sigma r_p$.

On peut donner à ce reste une forme qui permette d'en déterminer aisément les limites. On a, en vertu de la formule du n° 283, VI, la différentielle $\varphi_{2p}(t)\,dt$ étant de signe constant, et θ étant positif et < 1,

$$r_p = h^{2p+1} f^{(2p+1)}(x_0 + \theta h) \int_0^1 \varphi_{2p}(t)\,dt.$$

D'ailleurs

$$\int_0^t \varphi_{2p}(t)\,dt = \varphi_{2p+1}(t) = A_{2p+1} t,$$

d'où, en faisant $t = 1$,

$$\int_0^1 \varphi_{2p}(t)\,dt = A_{2p+1};$$

donc

$$r_p = A_{2p+1} h^{2p+1} f^{(2p+1)}(x_0 + \theta h).$$

Par conséquent,

$$-\Sigma r_p = \ldots + A_{2p-1} h^{2p+1} [f^{(2p+1)}(x_0 + \theta h) + f^{(2p+1)}(x_0 + h + \theta h) + \ldots$$
$$\ldots + A_{2p-1} . 2nh . h^{2p} \frac{f^{(2p+1)}(x_0 + \theta h) + f^{(2p+1)}(x_0 + h + \theta h) + \ldots}{2n},$$

ou enfin, en représentant par $\mathfrak{M} y^{(2p)}$ une valeur moyenne entre les valeurs que prend $y^{(2p)}$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$,

$$(23) \qquad R_p = -A_{2p-1}(X - x_0) h^{2p} . \mathfrak{M} y^{(2p)}.$$

503. *Exemples.* — I. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2 = 0,6931471 8 \ldots$$

En prenant $2n = 10$, $h = 0,2$, on trouve

$\frac{1}{2} y_0 = 0,50000000$	
$y_2 = 0,83333333$	$y_1 = 0,90909091$
$y_4 = 0,71428571$	$y_3 = 0,76923079$
$y_6 = 0,62500000$	$y_5 = 0,66666667$
$y_8 = 0,55555556$	$y_7 = 0,58823529$
$\frac{1}{2} y_{10} = 0,25000000$	$y_9 = 0,52631579$
$\frac{P}{h} = 3,47817460$	$\frac{Q}{h} = 3,45953943$
$P = 0,69563492;$	$Q = 0,69190789$ (form. de Poncelet);

$$y' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$Y' - y'_0 = \frac{3}{4};$$

$$-\frac{h^2}{12}(Y' - y'_0) = -0,00250000,$$

$$\frac{h^2}{24}(Y' - y'_0) = -0,00125000;$$

$$y''' = -\frac{6}{(1-x)^4},$$

$$Y''' - y'''_0 = \frac{45}{8};$$

$$\frac{h^4}{720}(Y''' - y'''_0) = -0,00001250,$$

$$-\frac{7h^4}{5760}(Y''' - y'''_0) = 0,00001094,$$

$$-\frac{h^4}{2880}(Y''' - y'''_0) = -0,00000312;$$

	P = 0,69563492		Q = 0,69190789
1re correction.	—250000	1re correction.	—125000
2e »	+ 1250	2e »	— 1094
	S = 0,69314742		S = 0,69314695
S — valeur exacte =	+ 26.	S — valeur exacte =	— 23.

$$\tfrac{1}{3}(P + 2Q) = 0,69315023 \text{ (formule de Simpson).}$$

$$1^{re} \text{ correct.} = \quad -302$$

$$S = 0,69314721$$

$$S - \text{valeur exacte} = \quad + 3.$$

En prenant $n = 10$, $h = 0,1$, la formule (1) donnerait

$$P = 0,69377140$$

$$1^{re} \text{ correction.} \quad -62500$$

$$2^{e} \quad » \quad + 78$$

$$S = 0,69314718$$

valeur exacte jusqu'au dernier chiffre.

II. Si l'on propose de calculer

$$\int_{1000}^{1010} \log x\,dx = 69,1273869526.$$

on a, en prenant $h = 1$,

$$\log 1001 + \log 1002 + \ldots + \log 1009 = 62,21465\,56821$$
$$\tfrac{1}{2}\log 1000 + \log 1010 = 6,91273\,04444$$

$$\frac{P}{h} = P = 69,12738\,61265$$
$$\tfrac{1}{2}Y = \tfrac{1}{2} = -8251$$
$$S = 69,12738\,69516$$

valeur exacte jusqu'à la dernière décimale.

III. Mais il y a des cas où la formule est beaucoup moins convergente, et où même elle ne peut servir à obtenir une approximation suffisante. Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int_1^{10} \log x\,dx = 10\log 10 - 9 = 14,0258509\ldots$$

On trouve ici

$$P = 13,9531200$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10} - 1\right) = 0,0750000$$
$$+ \frac{1}{720}\left(\frac{2}{1000} - 2\right) = -27751$$
$$S = 14,0253449$$
$$S - \text{valeur exacte} = -5060.$$

On voit dans cet exemple que la formule (1), avec deux corrections, laisse encore une erreur $> 0,0005$.

EXERCICES.

I. — Développement en séries.

1. Développer, par le théorème de Maclaurin, les fonctions

$$e^{x\cos b}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(a + x\sin b), \qquad \frac{x\sin a}{1 - 2x\cos a + x^2},$$

$$\sqrt{1 - 2x + x^2}, \qquad \arccos(a + x),$$

$$a^{x^2+(y)}, \qquad \operatorname{arc\,tang}(x + y).$$

2. Série de Bernoulli,

$$F(0) = F(x) - \frac{x}{1}F'(x) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x) + \ldots.$$

La déduire soit de la série de Taylor, soit de l'intégration par parties, appliquée à l'expression $\int F'(x)\,dx$. Expression du reste. Application au développement des fonctions $\log(1 + x)$, $(1 + x)^m$, etc.

3. Développer suivant les puissances de h les fonctions

$$\sin(x + h), \quad \operatorname{Ch}(x + h), \quad \operatorname{Sh}(x + h\sqrt{-1}), \quad \arccos(x + h).$$

4. Sommer la série

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \ldots,$$

en la différentiant, sommant la série obtenue, puis intégrant de nouveau. Déduire de là la somme de la série

$$1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} - \ldots.$$

5. Sommer de même les séries

$$\frac{2}{1}x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1.2} - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} - \frac{x^3}{4.5} + \ldots,$$

$$\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots,$$

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{1.(n+1)} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{1.2\ldots p.(n+p)} + \ldots.$$

6. Trouver la somme des séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi(n).x^n}{1.2\ldots n}, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi(n).x^n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)},$$

où $\varphi(n)$ désigne un polynôme algébrique d'un degré déterminé quelconque.

7. Développer $\int \frac{dx}{\cos x}$ suivant les puissances de $\sin x$. En déduire le développement de

$$\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).$$

8. Développer, suivant les puissances de x, la fonction

$$y = \operatorname{tang}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

9. Développer, par la méthode des coefficients indéterminés, les fonctions y données par les équations

$$y = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y = \log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},$$

$$x = y\,e^y = \sqrt{x^2+1}\,e^{-\sqrt{x^2+1}}.$$

10. φ et χ désignant deux fonctions, continues ainsi que leur dérivées, et μ un nombre compris entre les entiers positifs m et $m+1$, jusqu'à quel terme peut-on pousser le développement de

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)^{\mu}\chi(x)$$

suivant les puissances de $x - x_0$?

11. Développer, suivant les puissances de x, les expressions

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$e^{-x}\cos\left(\sqrt{2x-x^2}\right),$$

$$e^{x}\cos\left(x\sqrt{3}\right).$$

II. — Fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe.

Mettre sous la forme $a + bi$ les expressions

1. $\frac{1}{i}\operatorname{arc\,cos}(\operatorname{séc} x)$.

2. $\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$, pour $x > 1$.

3. $\frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$, pour $x < 0$.

4. $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$.

5. $e^{\arcsin 2}$.

6. $\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}$ arc tang $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, pour $x^2 < a^2$.

7. $i\sin[i\log(x+\sqrt{x^2+1})]\cos[i\log(x-\sqrt{x^2-1})]$.

8. $\text{arc}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1}-i+\frac{1}{2}\sqrt{-1-i}\right)$.

9. $\frac{\log(1+x-iy)}{x+iy}-\frac{\log(1-x-iy)}{x-iy}$.

10. $\log(x+y+z+\alpha\log(x+\alpha y+\alpha^2 z)+\alpha^2\log(x+\alpha^2 y)+\alpha z)$.
α étant une des racines cubiques complexes de l'unité.

11. Les variables x et y étant liées par la relation

$$\tang y = m\tang x,$$

développer y en série ordonnée suivant les puissances de m, en se servant des expressions des tangentes au moyen des exponentielles imaginaires.

De la différentiation de la série ainsi obtenue tirer le développement de

$$\frac{1-n^2}{1+2n\cos 2x+n^2},$$

où $n=\frac{1-m}{1+m}$.

12. Décomposer la fonction

$$1-2a\cos x+a^2=1-a(e^{xi}+e^{-xi})+a^2$$

en facteurs de la forme $\alpha+\beta e^{\pm xi}$, et en tirer l'expression du développement d'une puissance quelconque de cette fonction.

13. Développer les expressions

$$\log\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{1+2x\sin\alpha+x^2}{1-2x\sin\alpha+x^2},$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{1+2x\cos\alpha+x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Examiner, pour $x=1$, les cas de $\alpha=\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

III. — Détermination des vraies valeurs.

(A). Calculer

Pour $x = a$.

1. $\dfrac{x^2 - a\sqrt{ax}}{a - \sqrt{ax}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+3x} - \sqrt{3a}}$.

3. $\dfrac{x^2 - ax + \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{x}}{2a\sqrt{x} - a - x\sqrt{a}}$.

4. $\dfrac{a \log \dfrac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Pour $x = 0$.

5. $\dfrac{\sin x^2}{1 - \cos x}$.

6. $\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

7. $\dfrac{\sin x - x e^x}{\cos x - e^{2x} - 2x}$.

8. $\dfrac{x \log(1 + \sin x)}{e^{\tang x} - x - 1}$.

9. $\dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$.

10. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

11. $\dfrac{\log(1 - x + x^2)}{\sin^2 x}$.

12. $\dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$.

13. $\dfrac{\tang \pi x - \pi x}{2x^2 \tang \pi x}$.

14. $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi}{2x \tang x}$.

15. $\dfrac{\sin(\tang x)}{\tang(\sin x)}$.

16. $\dfrac{\tang x - x}{x - \sin x}$.

17. $\dfrac{\sin 2x - 2\sin^2 x - 2\sin x}{\cos x - \cos 2x}$.

18. $\dfrac{\sin(a - x) - \sin(a + x)}{\cos(a - x) - \cos(a + x)}$.

19. $\dfrac{e^x - 1 - \log(1 + x)}{x^2}$.

20. $\dfrac{\operatorname{Sh} x}{1 - x^2 - \log(1 - x)}$.

21. $\dfrac{\operatorname{Sh} x - \tang x}{\sin x - \operatorname{Th} x}$.

22. $\dfrac{1 - x \cot x}{1 - \cos x}$.

23. $\dfrac{\log \tang a x}{\log \tang x}$.

24. $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x(e^{2x} - 1)}$.

25. $\dfrac{\pi x - 1}{2x^2} + \dfrac{\pi}{x(e^{\pi x} - 1)}$.

26. $\left(\dfrac{\tang x}{x}\right)^{\frac{1}{x^n}}$, $(n = 1, 2, 3)$.

27. $(\cos ax)^{\frac{b}{x^n}}$, $(n = 1, 2, 3)$.

28. $\dfrac{2 \tang x - \tang 2x}{x(1 - \cos 3x)}$.

Pour $x = 1$,

29. $\dfrac{\log x}{\sqrt{1-x}}$.

30. $\dfrac{x^m - x^{m+n}}{(1-x^2)^p}$.

31. $\dfrac{x^x - x}{1 - x + \log x}$.

32. $\dfrac{\log \sin \frac{1}{2}\pi x}{(x-1)^2}$.

33. $\dfrac{\pi \operatorname{tang} \frac{1}{2}\pi x}{4x} - \dfrac{1}{1-x^2}$.

34. $\dfrac{\log \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{1}{2}\pi x}$.

35. $\dfrac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

36. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Pour $x = \dfrac{\pi}{4}$,

37. $\operatorname{séc} 2x \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

38. $\operatorname{tang} 2x \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

39. $\dfrac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\log \sin 2x}$.

40. $4x \operatorname{tang} 2x - \dfrac{\pi}{\cos 2x}$.

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$,

41. $(\sin x)^{\operatorname{tang} x}$.

42. $(\operatorname{tang} x)^{\cos x}$.

43. $(a + b e^{\operatorname{tang} x})^{\pi - 2x}$.

44. $\left\{ \sqrt{\dfrac{2 - \cos 2x - \sin x}{x \sin 2x + x \cos x}} - \left(\dfrac{\pi - 2x}{2 \sin 2x}\right)^2 \right.$.

Pour $x = \infty$,

45. $(1 + ax)^{\frac{b}{x}}$.

46. $x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

47. $x - x^2 \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

48. $(\operatorname{Th} x)^{\operatorname{Sh} x}$.

49. $\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$.

50. $\dfrac{x^6\left(\sqrt[6]{1 + x^6} - \sqrt[3]{3 + x^3}\right) + x^4}{\sqrt{1 + x^2}}$.

51. $3x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - 8ex^3 \log(1 + x)$.

52. Pour $x = 0$, calculer la valeur de y, donnée par l'équation

$$(x - y)^2 - y^2 \cos x + x = 0.$$

(B). Déterminer les valeurs des dérivées $\frac{dy}{dx}$ des fonctions y données par les équations suivantes :

Pour [illegible]

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible]

5. [illegible]

6. [illegible]

7. [illegible]

8. [illegible]

Pour [illegible]

9. [illegible]

Pour [illegible]

10. [illegible]

Pour [illegible]

11. [illegible]

Pour [illegible]

12. [illegible]

Pour $x = y = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$,

13. $x^2 - y^2 = a(x^2 - y^2)$.

Pour $xy = \frac{3}{10}a^2$, $x^2 - y^2 = a^2$,

14. $\frac{3}{10}a^2 + axy = \left(\frac{3}{10}a^2 - xy\right)\sqrt{x^2 - y^2}$.

Pour $x = a$, $y = b$,

15. $3(y - b)^2 - (x - a)^2 = 0$.

16. $(y-b)^2-(x-a)^2(x-c)=0.$

17. Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{2(x-a)(x-c)-(x-a)^2}{2(y-b)}$, en supposant

$$y^2-b^2-(x-a)(x-c)=0,\quad x=a,\quad y=b.$$

18. Calculer $\frac{(x-b)^2(y-c)-(y-c)^2}{(x-a)(y-b)^2}$, en supposant

$$x^2+xy+ax-cy+c(a+c)=0,\quad x=-a,\quad y=c.$$

IV. — Maxima et minima.

(A). Maxima ou minima des fonctions explicites.

1. $3x^4-28ax^3-84a^2x^2+96a^3x+48b^4.$

2. $10x^4-12x^3+15x^2-20x^3+20.$

3. $\frac{x^3+x}{x^4-x^2-1}.$

4. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}.$

5. $\left(a-x\right)^{\frac{3}{4}}\left(2ax-x^2\right).$

6. $x^n e^{-x^2}.$

7. $\frac{x}{1+x\tang x}.$

8. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$

9. $\cos x\,\mathrm{Ch}\,x.$

10. $(\tang x)^{\cos x}.$

11. $x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2.$

12. $y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x.$

13. $2x^2y^2-3xy^2-4x^2y+5.$

14. $a^2x^2y-2ax^3y+x^4y-2a^2x^2y-2x^3y^2+x^2y^3.$

15. $x+y-x^2-2y^3-4xy.$

16. $\sin x+\sin y+\cos(x+y).$

17. $xe^{y+z\sin y}.$

18. $x^2+y^2+z^2+x-xz-xy.$

19. $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots(x+y+z+\ldots)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$.

20. $x^{2}y^{2}z^{2}\ldots\left(\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}+\ldots\right)^{n}$.

21. $\frac{2xy-x^{2}}{\sin z+\sin y+\sin x}$.

22. $2x^{2}+4y^{2}+9z^{2}+3xy+x^{2}+6y+1$.

23. $x^{m}+y^{n}+1-x^{m}-y^{n}-1$.

24. $a\cos^{2}x+b\cos^{2}y$, pour $y=x+\frac{\pi}{4}$.

B. — Maxima ou minima des fonctions u, déterminées par les équations

1. $(\cos u-x)(\sin u-\cos x)$.

2. $x^{2}+au^{2}+\frac{bx^{2}}{c-x^{2}}+x^{2}(ad+x)=0$.

3. $(x+y+1)(u^{2}+x)=960$.

4. $ax^{3}+y^{3}+u^{3}+x^{2}yu+xy^{2}u+xyu^{2}$.

5. $u=rx^{2}+2sxy+ty^{2}+1+p^{2}x^{2}+2pqxy+1+q^{2}y^{2}$.

6. $u=xy+yz+zx+3axyz=0$.

7. $u=5x+3y+4\sin x+3\cos y$, $\left(x \text{ et } y=\frac{\pi}{2}\right)$.

8. $u^{4}x^{2}+(1+x^{2})u^{2}+x^{2}=0$.

9. $u=(x+1)(y+1)(z+1)$, $a^{2}bc+ca^{2}=b$.

10. $u=x+y+z$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $yz+zx+xy=c$.

11. $u=xz+y^{2}$, $x+y+z=a$.

12. $u=x^{2}+y^{2}+z^{2}$, $x:y=2:3$, $x+y+z=12$.

13. $\begin{cases} u=x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right), & x_1+x_2+x_3+x_4=315, \\ x_1:x_2:x_3=2:3:4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u=x_1+x_2+x_3+x_4, & x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=39930, \\ x_1:x_2:x_3=1:2:3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4, \\ x_1:x_2=2:3, \quad x_3:x_4=3:4, \quad x_1+x_2+x_3+x_4=1262. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 388, \\ x_1 : x_2 = 3 : 8, \quad x_3 : x_4 = 7 : 15. \end{cases}$

17. $u = (x_1^2 + \ldots + x_5^2) - (x_1 + \ldots + x_5)$, les cinq nombres $x_1, \ldots, x_5$ étant en progression harmonique (c'est-à-dire leurs inverses étant en progression arithmétique.)

(C). Questions diverses.

1. Inscrire dans un cône de révolution un prisme régulier, à base de n côtés, dont le volume soit maximum.

2. Avec quatre côtés donnés, former un quadrilatère d'aire maximum.

3. De quel point d'une verticale faut-il faire partir un point pesant pour qu'il arrive en un point donné du plan horizontal dans un temps minimum, en tombant suivant une ligne droite?

4. Partager un triangle en deux parties équivalentes par une droite de longueur minimum.

5. Un levier horizontal, formé d'une tige pesante homogène, et dont l'unité de longueur a un poids donné a, repose par une de ses extrémités A sur un appui fixe; en un point donné B de ce levier est suspendu un poids donné P, et à l'autre extrémité C agit une force verticale Y, tenant ce poids en équilibre. Quelle doit être la longueur AC pour que la force Y soit un minimum?

6. On veut enclore une pointe de terrain, terminée par deux murs rectilignes BC, DE, raccordés par un arc de cercle CAE, en abandonnant la portion comprise entre cet arc et les prolongements CO, EO des deux murs. La valeur par mètre carré du terrain enclos est m, celle du terrain délaissé est n, et le prix du mètre courant de mur est p. Où doit-on prendre les points de raccordement C, E, pour que la construction soit le plus avantageuse?

7. Une courbe étant déterminée par l'équation $\int y\,dx = kxy$, trouver la plus courte distance d'un point donné du plan à cette courbe.

8. A un segment de paraboloïde elliptique, dont la base est perpendiculaire à l'axe, circonscrire un cône de volume minimum.

9. Soient, dans une parabole donnée, une corde fixe AB, passant par le sommet A, et une ordonnée BC, perpendiculaire à l'axe AC. On cherche un point M de la parabole, situé entre A et B, et tel qu'en menant MNM′ perpendiculaire à l'axe et coupant AB en N et la courbe en M′, et MPQ parallèle à l'axe et coupant AB en P et BC en Q, on rende maximum l'une des quantités suivantes : 1° le segment MN, 2° le segment MP, 3° le triangle MNP, 4° le produit MN × NM′, 5° le produit MP × MQ.

10. Partager un arc donné en n parties dont la somme des sinus soit maximum ou minimum.

11. Étant donnés plusieurs points A, B, ... dans un plan, trouver un point M du plan, dont la somme des distances aux premiers soit un minimum. Discuter en particulier le cas où l'on donne trois points.

12. Un mobile part d'un point A avec une vitesse de grandeur donnée a, en se dirigeant vers la droite BC. Pendant son mouvement, il est entraîné avec une vitesse donnée b parallèlement à la droite BC. Quelle doit être la direction de l'impulsion primitive pour que le mobile atteigne la ligne BC dans le moins de temps possible?

13. Circonscrire à un triangle donné une ellipse d'aire minimum.

14. Avec trois côtés égaux former un trapèze d'aire maximum.

15. Par un point de l'un des axes d'une ellipse mener à la courbe une droite de longueur maximum ou minimum.

16. Circonscrire à un triangle donné un triangle isoscèle d'aire minimum.

17. Dans un cône de révolution, de base et de hauteur données, faire une section elliptique d'aire maximum.

18. Avec un secteur découpé dans un cercle de rayon donné, on forme la surface convexe d'un cône de révolution. Déterminer l'angle du secteur de manière à rendre maximum 1° le volume du cône, 2° la différence entre les aires de la surface convexe et de la base.

19. Plus courte distance de deux courbes dans l'espace.

20. Avec quatre côtés égaux AB, BC, CD, DE, former un pentagone d'aire maximum, les côtés AB, DE étant perpendiculaires au côté inconnu AE.

21. Parmi les tétraèdres de même base et de même hauteur, quel est celui dont la surface est minimum?

22. Inscrire dans un cercle donné un triangle de périmètre donné et d'aire maximum.

23. Par un point A pris à l'intérieur d'un angle droit BOC, mener une droite BAC, de manière que la différence de ses segments AB, AC soit minimum.

24. Maximum de l'aire d'un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible au cercle, et dont on donne le périmètre et un angle.

25. Étant donnés n points $A_1, \ldots, A_n$ dans l'espace, mener par un autre point donné un plan dont la somme des carrés des distances aux n points soit un minimum.

26. Déterminer, sur la surface d'un cylindre ou d'un cône de révolution, la ligne la plus courte entre deux de ses points, par la condition que cette ligne doit se changer en ligne droite, lorsqu'on développe la surface sur un plan. Cela posé, déterminer la distance minimum, sur la surface d'un cylindre ou d'un cône de révolution, entre un point de la surface convexe et un point du plan de la base.

27. Un cylindre de révolution étant surmonté d'une demi-sphère, minimum de la distance d'un point de la surface convexe du cylindre à un point de la surface de la demi-sphère.

28. Déterminer la position des sections circulaires menées par le centre d'un ellipsoïde, par la condition que le rayon vecteur d'un point de la section ne présente ni maximum ni minimum.

V. — Intégration des fonctions algébriques et transcendantes.

Intégrer les fonctions suivantes (multipliées par dx) [1] :

1. $\dfrac{3x-7}{2x^2-3x-5}$.

2. $\dfrac{x^3+9x^2-19x-16}{x^2-2x-3}$.

3. $\dfrac{7x^3-17x^2-17x-6}{x^4-7x^3+17x^2-17x+6}$.

4. $\dfrac{2-x-x^2}{1-x^3}$.

5. $\dfrac{4x^3-63x^2-338x-619}{(x-7)(x-5)^3}$.

6. $\dfrac{2x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^3}$.

7. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^3}$.

8. $\dfrac{1}{x^6-1}$.

9. $\dfrac{x^4-3a^2x^2-2a^4}{(x^4-a^2x^2-a^4)^2}$.

10. $\dfrac{x^6-7x^4-4x^3-14x}{(x^4-7x^2)^2}$.

11. $\dfrac{x-1}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}$.

12. $\dfrac{6x(6-5x^2)(1+5x^2)^2}{(2+5x^2)^3}$.

13. $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-ax)}$.

14. $\dfrac{8x^4-3x^3-5}{x(x^2+2x+3)^3}$.

15. $\dfrac{2x^5-x^2}{(x^2+1)^2(x^2-x+1)^2}$.

16. $\dfrac{5x^3}{1+x^3}$.

17. $\dfrac{3x-2x^2}{40+38x-11x^2-x^3}$.

18. $\dfrac{1}{x^8-x^7-x^4-x^3}$.

19. $\dfrac{x^m}{ax^{2n}+bx^n+c}$.

20. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^3+1)}$.

---

[1] *Voir* les *Exercices* relatifs au Livre I, p. 266 et suiv.

21. $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1+x^4+16x^2-16x^3\\-14x+6\end{array}\right]\\ \left[\begin{array}{l}16x^4-16x^3+14x^2-12x\\+80x^2+16x+16\end{array}\right]\end{array}\right.$.

22. $\dfrac{\sqrt{x}+x\sqrt{x}+x^2}{x+\sqrt{x}}$.

23. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

24. $\dfrac{x}{(a+bx)^2}$.

25. $F\sqrt[2m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+a}, x$.

26. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$.

27. $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

28. $\dfrac{1-2x^2}{x(1+x^2)+\sqrt{1-x^2}}$.

29. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$.

30. $\dfrac{x^{2n}+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

31. $\dfrac{2x^3+3ax^2-2a^2x-a^3}{2(x^2-ax)^2}$.

32. $\dfrac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

33. $\dfrac{1}{(1+2x\cos\alpha+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

34. $\dfrac{mx+n}{(ax^2+bx+c)\sqrt{2x^2+3x+4}}$.

Simplifier cette expression par la substitution $x=\dfrac{z+\alpha z^2}{1+\alpha z}$.

35. $\dfrac{1}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{x+3x^2}}$.

36. $(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}(5a+x)$.

37. $\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$.

38. $\dfrac{x+1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

39. $\dfrac{x^2}{ab^2+\sqrt{a^2b^2-3bx^2}}$.

40. $\dfrac{x^6}{a+x^3+\sqrt{2ax-x^2}}$.

41. $x\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

42. $\dfrac{(a-x)^2}{(a+x)^3}$.

43. $\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}}$.

44. $x^{\frac{1}{2}}\left(a-bx^{\frac{1}{2}}\right)^n$.

45. $x^{-2}(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$.

46. $\dfrac{1}{x^{2m}\sqrt{1-x^2}}$.

47. $x^{2m}(2ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

48. $x^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

49. $x^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

50. $x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

51. $\dfrac{x^{2m}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

52. $\dfrac{1}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

53. $\dfrac{1}{x}\left(a+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

54. Des formules établies pour la réduction des intégrales des différentielles binômes $u_{m,p} = \int x^m (ax^n + b)^p \, dx$, déduire d'autres formules qui fassent varier les deux exposants m et p à la fois et dans le même sens. (*Voir* 437, 438.)

55. Étant proposée l'intégrale $u_{m,p} = \int x^m X^p dx$, où $X = ax^{2n} + bx^n + c$, établir une formule de réduction pour faire varier l'exposant m, sans altérer p. Il suffit, pour cela, de différentier $x^{m+1} X^{p+1}$, et d'intégrer de nouveau la différentielle convenablement transformée. Considérer, en particulier, le cas de $n = 1$, avec m entier, positif ou négatif. Dans le cas de $m = 0$, trouver une formule de réduction qui fasse varier l'exposant p (en éliminant $u_{2,p-1}$, $u_{1,p-1}$ par la formule précédente).

Cas de p entier et de $p =$ un entier $+ \frac{1}{2}$.

56. $\dfrac{1}{(x^2 - 2ax\cos z + a^2)^n}$.

57. $\dfrac{x + 2}{(x^4 - 2x^2\cos 2z + 1)^n}$.

58. $\dfrac{x^m}{(x^{2n} - 2a^n\cos nz\, x^n + a^{2n})^p}$.

59. $\dfrac{x^m}{(1 + x^n)\sqrt{1 - x^2}}$, $(n = 4q,\ 4q + 1,\ 4q + 2,\ 4q + 3)$.

60. Calculer $\displaystyle\int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{(1 + x)x^p}$, $\left(p = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\right)$.

Opérer soit par substitution, soit à l'aide de la formule

$$\int\int y\,dx^2 = x\int y\,dx - \int xy\,dx.$$

61. Calculer $\displaystyle\int\int\int \frac{dx^3}{1 - x^2}$ au moyen de la formule

$$\int\int\int y\,dx^3 = \frac{1}{2}\left(x^2\int y\,dx - 2x\int xy\,dx - \int x^2 y\,dx\right).$$

62. $\tang^m x$. $(m = 3,\ 2,\ 3)$.

63. $\sin^2 x \cos^3 x$.

64. $\sin^4 x \cos^4 x$.

65. $\dfrac{\cos\ \sin\ mx}{\cos\ \sin\ nx}$, ($m$, n entiers) — Poser $e^{xi} = u$.

66. $\dfrac{\sin x}{\sin^2(x-z)+\sin(x-z)}$.

67. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

68. $\dfrac{1}{2-\operatorname{tang} x}$.

69. $(1-\operatorname{tang} x)\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}$.

70. $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{tang} x}$.

71. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}}}$.

72. $e^{\cos x}\sin(x)$.

73. $\dfrac{2\sqrt{1+\operatorname{tang} x}-1}{1-\cos 2x+(1+\operatorname{tang} x)}$.

74. $(\sin x-\cos x)\sqrt{\sin x+\cos x}$.

75. $\dfrac{\operatorname{tang} x+\cos 4x}{\operatorname{tang} x-\cot x}$.

76. $\dfrac{\operatorname{Ch} x-\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x+\operatorname{Sh} x}$.

77. $\sqrt{\operatorname{tang} x}$.

78. $\dfrac{a-b\operatorname{Ch} x}{a\operatorname{Ch} x-b}$.

79. $x\log\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

80. $x\sqrt{x^2+a^2}\log\dfrac{x^2-b^2}{b^2}$.

81. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\log\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

82. $a^x\log x$.

83. $\dfrac{\operatorname{Ch}(x^2)}{x+\operatorname{Sh} x}$.

84. $\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch} x\operatorname{Sh} x}}$.

85. $1+\operatorname{tang} x+\operatorname{tang}^2 x+\sin^2 x$.

86. $\dfrac{\sqrt{a^2+\sin^2 x}}{\sin x}$.

87. $x^n\sin x$.

88. $x^n\operatorname{arc\,tang} x$.

89. $x^n\operatorname{arc\,sin} x$.

90. $\operatorname{arc\,sin} x^n$.

91. $x(\operatorname{arc\,tang} x)^2$.

92. $3\sin^2 x$.

93. $x+x^2$.

94. $\dfrac{x^2+a^n}{a+x^2}$.

95. $a^{\sin x}\sin^n x$.

96. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

97. $e^{n\operatorname{arc\,sin} x}$.

98. $\operatorname{arc\,tang}\dfrac{a}{x-a}$.

VI. — Calcul des intégrales définies [1].

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(3x-7)\,dx}{2x^2-3x+5}$.

2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x+2}$.

[1] Faire les calculs soit en passant par les intégrales indéfinies, soit au moyen des formules d'approximation ou du développement en séries.

3. $\int_0^2 \frac{3-x^2}{3+x^2}\,dx.$

4. $\int_{\infty}^{x} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}.$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^{1/2}}.$

6. $\int_{-2}^{-1} \frac{3-2x-x^2}{1+2x+3x^2}\,dx.$

7. $\int_{1-\sqrt{2}}^{1} \frac{1-3x}{3+x^2}\,dx.$

8. $\int_1^e \frac{dx}{x^2\sqrt{1+3x}}.$

9. $\int_{a-b}^{a+b} \frac{dx}{x^2\sqrt{b^2-(x-a)^2}}.$

10. $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{x^2\,dx}{x^4-5x^2+8x+4}.$

11. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}.$

12. $\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $\int_1^a \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$

14. $\int_0^5 x\log(x+1)\,dx.$

15. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^3 x\sin^3 x}.$

16. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}.$

17. $\int_0^1 x^2\sin x\,dx.$

18. $\int_0^1 x^2\operatorname{arctang} x\,dx.$

19. $\int_0^{\pi} e^x\sin^3 x\,dx.$

20. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx.$

21. $\int_0^{10} \frac{dx}{\log x}.$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx.$

23. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$

24. $\int_0^{\infty} e^{-x}x^2\,dx.$

25. $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{2}}\,dx.$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}.$

27. $\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\operatorname{Ch} x}.$

28. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{Sh} x}.$

VII. — Intégrales doubles.

Étant données les relations

$$x = a(t - \operatorname{Th} t), \quad r = \frac{a}{\operatorname{Ch} t}, \quad y = r\cos u, \quad z = r\sin u,$$

transformer et calculer les intégrales doubles

$$\iint x\,dy\,dz, \quad \iint x^2\,dy\,dz, \quad \iint r^2\,dy\,dz,$$
$$\iint r^2 y\,dy\,dz, \quad \iint r^2 z\,dy\,dz, \quad \iint xy\,dy\,dz.$$

et, si l'on fait $\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$, les intégrales

$$\iint \omega x\,dy\,dz, \quad \iint \omega y\,dy\,dz, \quad \iint \omega z\,dy\,dz, \text{ etc.}$$

en y introduisant, au lieu des variables indépendantes y, z, les variables indépendantes t, u, et prenant pour limites des intégrations $t = 0$ et ∞, $u = 0$ et 2π.

VIII. — Application de la méthode de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$ aux intégrales suivantes, définies ou indéfinies.

1. $\int \cos ax\,dx$.

2. $\int \operatorname{tang} ax\,dx$.

3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x}$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}\cos(a\sin x + nx)\,dx = (-1)^n \frac{2\pi a}{1.2\ldots n}$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}\sin(a\sin x + nx)\,dx = 0$.

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2}$.

   Intégrer entre les limites $a = 0$ et ∞.

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}$, pour $m = 0, 1, 2$.

   Intégrer par rapport à b entre les limites a et b, ou entre les limites b et ∞.

8. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}$.

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2 + x^2}\,\frac{dx}{x}$. (*Voir* n° 485, IV.)

Intégrer entre les limites $b = 0$ et 1, ou encore différentier par rapport à a.

10. En désignant par u l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^{ax^2}\,dx}{1 + x^2},$$

démontrer qu'elle satisfait à la relation

$$4a\left(\frac{du}{da} - u\right)^2 = 4e^a u + \pi.$$

On s'appuiera sur la formule du n° 483.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

Considérations générales. — Notions sur le Calcul des opérations.

Pages

§ I. Objet des Mathématiques. (Nos 1-4) 1
§ II. Des opérations en général. (Nos 5-10) 4
§ III. Des propriétés combinatoires des opérations. (Nos 11-17) 6
§ IV. Propriétés des opérations associatives. (Nos 18-26) 10
§ V. De la propriété distributive. (Nos 27-29) 15

CHAPITRE II.

Généralisation successive de l'idée de quantité.

§ I. Des quantités arithmétiques. (Nos 30-43) 18
§ II. Des quantités algébriques réelles. — Représentation analytique des points d'un espace à une dimension. — Théorie des quantités négatives. (Nos 44-54) 24
§ III. Représentation des points d'un espace à deux dimensions au moyen des quantités complexes. — Opérations algébriques sur ces quantités. (Nos 55-83) 34
§ IV. Théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (Nos 84-88) . . . 47

CHAPITRE III.

Notions élémentaires sur la théorie des déterminants.

§ I. Définition et formation des déterminants. (Nos 89-102) 51
§ II. Propriétés générales des déterminants. (Nos 103-122) 61
§ III. Exemples divers de l'application des théories précédentes. (Nos 123-130). 73
§ IV. Résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues. (Nos 131-138) 83

Pages

§ V. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques. (Nos 139-147) 88
§ VI. Produit de deux déterminants. (Nos 148-153) 96
Exercices 101

LIVRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

Des fonctions et de la continuité. — Infiniment petits et infiniment grands. Limites. — Substitution des infiniment petits.

§ I. Constantes et variables. — Fonctions. — Infiniment petits et infiniment grands. — Principes des limites. — Application aux nombres incommensurables. (Nos 154-170) 103
§ II. De la continuité des variables et des fonctions. (Nos 171-180) 117
§ III. Infiniment petits des divers ordres. (Nos 181-190) 125
§ IV. Théorèmes sur la substitution des infiniment petits les uns aux autres dans la recherche des limites de rapports ou de sommes. (Nos 191-197). 131

CHAPITRE II.

Dérivées et différentielles. — Intégrales. — Méthodes de différentiation et d'intégration. Différentielles et dérivées partielles. — Leurs propriétés.

§ I. Problème des tangentes. — Vitesse, fluxions, dérivées. (Nos 198-202) .. 140
§ II. Propriétés des dérivées. — Relation entre l'accroissement d'une fonction et une valeur moyenne de sa dérivée. — Cas où la dérivée est nulle. — Dépendance entre le signe de la dérivée et le sens de l'accroissement de la fonction. (Nos 203-216) 144
§ III. Différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes. (Nos 217-230) 153
§ IV. Des intégrales définies et indéfinies. (Nos 231-250) 164
§ V. Méthodes générales de différentiation. (Nos 251-258) 179
§ VI. Différentielles et dérivées des principales fonctions élémentaires. — Formules d'intégration qui s'en déduisent. (Nos 259-281) 186
§ VII. Méthodes générales d'intégration. (Nos 282-285) 208

Pages.

§ VIII. Dérivées des divers ordres des fonctions d'une seule variable. — Calcul direct des dérivées d'ordre quelconque. (N° 286-293) 215
§ IX. Différentielles des divers ordres d'une fonction d'une seule variable. — Leur emploi pour la représentation des dérivées. (N° 294-298) 231
§ X. Changement de la variable indépendante. (N° 299-304) 237
§ XI. Différentielles et dérivées partielles, différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables indépendantes. (N°s 305-310). 243
§ XII. Des déterminants fonctionnels. (N° 311-318) 249
§ XIII. Changement de variables dans le cas le plus général. (N°s 319-321) 259
§ XIV. Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. (N° 322) 264

Exercices 266

LIVRE SECOND.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

Développement des fonctions en séries.

§ I. Relations entre les accroissements finis des fonctions d'une seule variable et les valeurs moyennes de leurs dérivées. (N°s 323-330) 275
§ II. Théorèmes de Taylor et de Maclaurin. (N°s 331-341) 283
§ III. Applications du théorème de Maclaurin au développement des fonctions en séries. (N° 342-353) 291
§ IV. Théorèmes généraux sur les séries. — Usage de l'intégration pour le développement des fonctions en séries. — Méthode des coefficients indéterminés. (N° 354-363) 306
§ V. Fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe, et leurs fonctions inverses. (N° 364-374) 317

CHAPITRE II.

Applications analytiques du Calcul différentiel.

§ I. Vraies valeurs des expressions qui se présentent sous une des formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, etc. (N° 375-390) 339
§ II. Maxima et minima des fonctions d'une seule variable indépendante. (N°s 391-401) 345
§ III. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes. (N°s 402-410) 363
§ IV. Décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples. (N°s 411-423) 378

CHAPITRE III.

Intégration des fonctions explicites.

Pages.

§ I. Intégration des fonctions rationnelles. (Nos 424-426) 390
§ II. Intégration des irrationnelles dépendantes d'un seul radical carré, qui porte sur un trinôme du second degré. (Nos 427-432) 396
§ III. Des différentielles binômes. — Cas d'intégrabilité. — Formules de réduction. (Nos 433-441) 402
§ IV. Autres exemples d'intégration par les formules de réduction successive. (Nos 442-455) 411
§ V. Remarques sur le passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies. (Nos 456-469) 424
§ VI. Différentiation et intégration sous le signe $\int$. — Intégrales doubles; intégrales multiples. (Nos 470-476) 443
§ VII. Changement de variables dans les intégrales multiples. (Nos 477-479) ... 452
§ VIII. Méthodes spéciales pour le calcul des intégrales définies. (Nos 480-485). 456
§ IX. Des intégrales eulériennes. (Nos 486-491) 465
§ X. Calcul approché des intégrales définies. (Nos 492-503) 471
Exercices 488

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

3202 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

ERRATA DU TOME PREMIER.

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de*	*Lisez*
33	6	$a - o = o$	$a - o = a$
41	1 en remontant	OM = . ON	OM = ON
77	14	a_1 4e élément de la 1re ligne du déterminant R	a_1^{IV}
»	16	$\frac{a_2}{a_3}$	$\frac{a_1}{a_1'}$
80	10, dern. lig. du dét.	a_1	a_1^{IV}
86	7 en remontant	n° 17	n° 134
88	1	n° 11	n° 131
93	13	α'	α'_1
94	5 en remontant	[26]	[114]
101	7 en remontant	$a_n^n = n$	$a_n^n = r$
154	2 en remontant	εdb	εdx
172	13	[214]	[232]
»	15	$f^{\prime\prime} \varepsilon da$	$f^{\prime\prime} \varepsilon dx$
179	9	x^{n-1}	x_0^{n-1}
205	5	[278]	[279]
207	6 en remontant	$x^{x^x} x^x [\ldots] dx$	$x^{x^x} x^x [\ldots] \frac{dx}{x}$
211	7	< 0	> 0
»	8	$\frac{1}{2\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$	$\frac{1}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$
216	10	$D_x^n (\ldots)$	$(D_x^n - b_x y)$
»	6 en remontant	$D_x u$	$D_x^n u$
243	10	$2a \sin \frac{1}{2} t$	$2a \sin \frac{1}{2} t dt$
256	1	$-\frac{\partial z_n}{\partial z_1}$	$-\frac{\partial z_n}{\partial y_1}$
263	6	$\frac{\partial^3 z}{\partial p^2}$	$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}$
276	7	$f(x)$	$f'(x)$
296	9	$+ \frac{1}{\ldots}$	$+ \frac{1}{\ldots}$

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de*	*Lisez*
297	12 en remontant	$L(10)+1$	$L(10+1)$
304	7	$x^{2m}(0)$	$f(x^{2m}(1))$
309	11	$\int_{x_0}^{x} R(x)dx$	$\int_{x_0}^{X} R(x)dx$
312	11	$\int_0^h f(X-x)dx$	$\int_0^{x_0} f(X-x)dx$
313	3	V	VI
»	8 en remontant	$X-x\,\frac{i}{p}$	$X-x\,\frac{p}{p}$
314	11 en remontant	V	VI
315	1	V	VI
317	7	$-a_2x^2$ $+a_2$	$-a_2x^2$ $-2a_2$
325	8	$\frac{n}{v}$	$\frac{v}{n}$
328	2	$e^{(x+b)x}$	$e^{(x+b)x^2}$
»	4	$e^{(x+b)x}$	$e^{(x+b)x}$
»	7	V	IV
332	7	$\frac{\sqrt{h}}{2a}$	$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$
341	11	$w-tu$ tw	$w-tu$ tw
368	9	$\sum_{2,2}^{n,n}$	$\sum_{2,2}^{n,n}$
391	2	$\frac{1}{2}\left(Q-\frac{Pp}{2}\right)$	$Q-\frac{Pp}{2}$ $\sqrt[2]{\frac{p^2}{4}-q}$
406	11	$y^{x+1}dx$	$y^{x+2}dx$
409	7 et 14	$y^{x+r}-1$	y^{x+r+1}
413	2	$\int\frac{\cos dx}{}$	$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$
415	8 en remontant	$\int u_1 v^{n-1}dx$	$\int u_1 v^{n-1}dv$
416	7	$(\log x)_n$	$(\log x)^n$
»	10 en remontant	$(n-1)(\log x)^{n-1}\frac{x}{}$	$(n-1)(\log x)^{n-1}\frac{x}{}$
»	»	$\frac{y_{n-1}}{n_{n-1}}$	$\frac{y_{n-1}}{n-1}$
»	5 en remontant	y^n	y_n
422	2	$+\frac{1}{2}+k^2x^2+$	$-\frac{1}{2}k^2x^2+$
430	2	[452]	[453]

Page.	*Lignes.*	*Lisez*	*Lisez*
[illegible]	[illegible] en remontant	V	VI
[illegible]	[illegible]	AC, BD	AB, CD
[illegible]	[illegible]	ABFE	ABEG
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	Effacez la seconde [illegible] du titre.	
[illegible]	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
473	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
»	[illegible] en remontant	cette	une
[illegible]	4	[illegible]	[illegible]
»	11	$\gamma, \gamma, \gamma'', \ldots$	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
478	[illegible]	[illegible]	[illegible]
»	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
483	[illegible] en remontant	[illegible]	[illegible]

605

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

P&A Sci.